

# Semi-anneaux et frises tropicales

par

Mélissa BARBE-MARCOUX

mémoire présenté au Département de mathématiques  
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, avril 2018

Le 11 avril 2018,

le jury a accepté le mémoire de Madame Mélissa Barbe Marcoux  
dans sa version finale.

Membres du jury :

Professeur Ibrahim Assem  
Directeur de recherche  
Département de mathématiques

Professeur David Smith  
Membre externe  
Département de mathématiques

Professeur Thomas Brüstle  
Président-rapporteur  
Département de mathématiques

# SOMMAIRE

Dans ce mémoire, nous commençons par introduire les semi-anneaux et les frises de semi-anneaux pour ensuite présenter quelques résultats portant sur les frises de semi-anneaux sur le carquois  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ . Nous nous intéressons ensuite aux frises tropicales sur le carquois d'Auslander-Reiten des catégories abéliennes et amassées et à leur lien avec les vecteurs dimensions des objets indécomposables de ces catégories.

**Mots-clef :** Semi-anneaux, frises, carquois  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ , frises tropicales, carquois d'Auslander-Reiten, catégories abéliennes et amassées, vecteurs dimensions

# REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de maîtrise, M. Ibrahim Assem, pour ses encouragements, sa grande patience et ses conseils.

Je remercie aussi mes collègues du département de mathématiques et du groupe de recherche en algèbre pour leur appui, leurs discussions fort instructives et les nombreux moments de bonheur qui parsèment mes années à l'Université de Sherbrooke.

Enfin, je remercie le Dr. Ibrahim Assem et le département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke pour leur soutien financier

Mélissa Barbe Marcoux  
Sherbrooke, septembre 2017

# TABLE DES MATIÈRES

<b>SOMMAIRE</b>	<b>iii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>iv</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>v</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 — Semi-anneaux et frises</b>	<b>2</b>
1.1 Semi-anneaux et semi-corps . . . . .	2
1.2 Frises sur semi-anneaux . . . . .	15
<b>CHAPITRE 2 — Généralisation des frises classiques sur <math>\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty</math> aux semi-anneaux</b>	<b>23</b>
2.1 Rayons et points accessibles de $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ . . . . .	25
2.2 Coefficients de linéarisation et polynômes de Tchebychev . . . . .	31
2.3 Frises tropicales . . . . .	40

<b>CHAPITRE 3 — Frises tropicales sur le carquois d’Auslander-Reiten d’une</b>	
<b>catégorie</b>	<b>46</b>
3.1 Catégories k-abéliennes . . . . .	47
3.2 Catégories amassées . . . . .	52
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>67</b>

# INTRODUCTION

Depuis le début des années 2000, les algèbres amassées définies par Fomin et Zelevinsky sont un sujet très étudié et un des outils pour calculer les variables amassées est les frises, introduites par Conway et Coxeter au début des années 1970.

Les frises étudiées dans leurs travaux prennent des valeurs dans des anneaux ou corps et puisque la soustraction n'est pas présente dans la relation de frise, il est intéressant de généraliser le concept aux semi-anneaux ou semi-corps.

C'est dans cet ordre d'idées que nous étudions plusieurs résultats connus pour les frises classiques afin de généraliser ces notions, comme les coefficients de linéarisation et un lien avec des polynômes de Chebyshev.

Ainsi, le premier chapitre introduit la structure de semi-anneau et la relation de frise sur celle-ci avec quelques résultats généraux. Ensuite, on s'intéresse au cas particulier de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  dans le chapitre 2 afin de donner les bases des résultats du chapitre 3.

Enfin, le troisième et dernier chapitre présente le cas des frises tropicales. De plus, on montre que les vecteurs dimension des objets indécomposables d'une catégorie abélienne ou amassée coïncident avec les valeurs d'une frise tropicale sur le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie.

# CHAPITRE 1

## Semi-anneaux et frises

Ce chapitre est une introduction à la théorie des semi-anneaux et au concept de frise sur ceux-ci. Ces derniers seront la pierre angulaire de ce mémoire. Il sera d'abord question des définitions et résultats de base qui permettront de se familiariser avec les semi-anneaux et de travailler avec eux. Ensuite, nous procéderons à quelques rappels sur les carquois avec l'objectif de généraliser le concept de frise sur un anneau, tel que présenté par Conway et Coxeter, au concept de frise sur un semi-anneau. En ce qui concerne les concepts élémentaires de théorie des catégories, nous référons le lecteur à [Ass97, ASS06].

### 1.1 Semi-anneaux et semi-corps

De façon brève, un semi-anneau est une structure algébrique munie d'une addition et d'une multiplication, mais qui ne possède pas d'inverse additif. Notre premier exemple est parmi les plus simples, soit l'ensemble des nombres naturels. La définition formelle de semi-anneau a été donnée dans les années 1930, voir [Van39] et par la suite, elle a été appliquée à la théorie des langages et des automates [KS85, Sak09]. De même que



pour les anneaux, nous pouvons définir les concepts de semi-corps et de morphismes de semi-anneaux et en déduire des propriétés telles que par exemple une version du théorème d'isomorphisme de Jordan [All69].

Il existe plusieurs définitions de semi-anneaux dans la littérature scientifique [KK10, Gol99], plus générales ou plus restrictives selon l'objectif recherché. Voici celle choisie pour ce mémoire.

**Définition 1.1.** *Un semi-anneau est un quintuplet  $(\mathbb{P}, \oplus, \odot, 1_\odot, 0_\oplus)$  tel que :*

- i)  $(\mathbb{P}, \oplus, 0_\oplus)$  est associatif, commutatif avec neutre  $0_\oplus$ , appelé le zéro,*
- ii)  $(\mathbb{P}, \odot, 1_\odot)$  est associatif avec neutre  $1_\odot$ , appelé l'unité,*
- iii) la multiplication se distribue à droite et à gauche sur l'addition, c'est-à-dire*  

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \text{ et } (a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c) \text{ pour tous } a, b, c \in \mathbb{P},$$
- iv) le zéro est absorbant, c'est-à-dire  $0_\oplus \odot a = 0_\oplus = a \odot 0_\oplus$  pour tout  $a \in \mathbb{P}$ .*

On notera le semi-anneau  $\mathbb{P}$  pour simplifier l'écriture. De même, on écrira  $0_\oplus = 0$  et  $1_\odot = 1$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

**Exemple 1.2.**

- a) L'ensemble des nombres naturels muni de l'addition, la multiplication, le zéro et l'unité usuels est un semi-anneau.*
- b) Toute algèbre de Boole est un semi-anneau. Une algèbre de Boole est un quintuplet  $(B, \vee, \wedge, I, O)$  tel que les deux opérations binaires  $\vee$  et  $\wedge$  sont commutatives, associatives et distributives l'une sur l'autre. Elles doivent aussi être idempotentes, c'est-à-dire que  $a \vee a = a$  et  $a \wedge a = a$  pour tout  $a \in B$ , et absorbantes entre elles, c'est-à-dire  $a \vee (a \wedge b) = a$  et  $a \wedge (a \vee b) = a$  pour tous  $a, b \in B$ . De plus, les éléments  $O$  et  $I \in B$  doivent être tels que  $O \vee a = a$ ,  $O \wedge a = O$ ,  $I \vee a = I$  et  $I \wedge a = a$  pour tout  $a \in B$ . Enfin, il existe une opération unaire  $a \mapsto a'$ , la complémentation, telle que  $a \vee a' = I$  et  $a \wedge a' = O$  pour tout  $a \in B$ , voir [BL08].*

Remarquons que  $(B, \vee, \wedge, I, O)$  induit un second semi-anneau obtenu de  $B$  en interchangeant les opérations et par le fait même l'unité avec le zéro. Un cas particulier est celui de l'ensemble des parties d'un ensemble  $X$ , noté  $\mathcal{P}(X)$ . Alors,  $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, X, \emptyset)$  et  $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, \emptyset, X)$  sont tous les deux des semi-anneaux.

c) Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie monoïdale et additive. Une catégorie est dite additive si elle est munie d'un objet zéro  $0$  et d'un biproduit, noté  $\oplus$ , pour toute paire d'objets. Il faut aussi que pour toute paire d'objets  $X$  et  $Y$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  soit un groupe abélien additif avec la composition  $\circ$  qui est distributive à droite et à gauche sur l'addition. Une catégorie est dite monoïdale si elle est munie d'un bifoncteur noté  $\otimes$ , d'un objet  $E$  et des trois isomorphismes naturels suivants :

$$\alpha : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z, \quad \lambda : E \otimes X \xrightarrow{\sim} X \quad \text{et} \quad \rho : X \otimes E \xrightarrow{\sim} X$$

tels que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) & \xrightarrow{\alpha} & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \xrightarrow{\alpha} ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \\ \downarrow X \otimes \alpha & & \uparrow \alpha \otimes W \\ X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) & \xrightarrow{\alpha} & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (E \otimes Y) & \xrightarrow{\alpha} & (X \otimes E) \otimes Y \\ \downarrow X \otimes \lambda & & \downarrow \rho \otimes Y \\ X \otimes Y & \xrightarrow{=} & X \otimes Y. \end{array}$$

Supposons aussi que pour tout foncteur  $X \otimes -$ , il existe un foncteur adjoint à droite. Posons  $\overline{\mathcal{M}}$  un squelette de  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire une sous-catégorie pleine formée d'un représentant de chaque classe d'isomorphisme des objets de  $\mathcal{M}$ . On prétend que

$(\overline{\mathcal{M}}, \oplus, \otimes, \overline{E}, \overline{0})$  est un semi-anneau où  $\oplus$  et  $\otimes$  sont les opérations sur  $\overline{\mathcal{M}}$  induites de  $\oplus$  et  $\otimes$  sur  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire que  $\overline{X} \oplus \overline{Y} = \overline{X \oplus Y}$  et  $\overline{X} \otimes \overline{Y} = \overline{X \otimes Y}$ . Il est clair que ces opérations sont correctement définies.

Il est alors aisé de vérifier que  $(\overline{\mathcal{M}}, \oplus, \overline{0})$  est commutatif, associatif et de neutre  $\overline{0}$  et que  $(\overline{\mathcal{M}}, \otimes, \overline{E})$  est associatif de neutre  $\overline{E}$  grâce aux propriétés détaillées plus haut.

Vérifions maintenant la distributivité. Supposons que  $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{W} \in \overline{\mathcal{M}}$ . Alors, la distributivité est vérifiée si

$$\overline{X} \otimes (\overline{Y} \oplus \overline{W}) = (\overline{X} \otimes \overline{Y}) \oplus (\overline{X} \otimes \overline{W})$$

et donc il faut un isomorphisme  $X \otimes (Y \oplus W) \cong (X \otimes Y) \oplus (X \otimes W)$ , ce qui est le cas à cause de l'existence d'un foncteur adjoint à droite pour tout  $X \otimes -$ , voir [Heu10]. Il reste à montrer que le zéro  $\overline{0}$  est absorbant. Or, pour tout  $\overline{X}$ ,

$$\overline{X} \otimes \overline{0} = \overline{X \otimes (0 \oplus 0)} = \overline{X \otimes 0} \oplus \overline{X \otimes 0}$$

et ainsi,  $\overline{0} = \overline{X \otimes 0}$ . De même,  $\overline{0} = \overline{0 \otimes X}$ .

Supposons que  $k$  est un corps algébriquement clos,  $A$  une  $k$ -algèbre de dimension finie et  $\text{mod}A$  la catégorie des  $A$ -modules à droite de type fini. Soit  $\oplus$  la somme directe et  $\otimes$  le produit tensoriel. On a que  $(\text{mod}A, \oplus, \otimes, A, 0)$  est une catégorie monoïdale, additive et dans laquelle il existe un adjoint à droite pour tout foncteur de la forme  $X \otimes -$ . Par conséquent,  $(\overline{\text{mod}A}, \oplus, \otimes, \overline{A}, \overline{0})$  est un semi-anneau.

Nous dirons qu'un semi-anneau est *commutatif* si sa multiplication est elle-même commutative. C'est le cas des exemples a), b) et c). De plus, dans ce qui suit, tous les semi-anneaux considérés seront commutatifs, sauf si nous indiquons le contraire. La suite de cette section présente des propriétés des semi-anneaux de même que quelques liens entre ces propriétés qui serviront dans les prochains chapitres.

**Définition 1.3.** Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau.

- i) Un élément  $a \in \mathbb{P}$  est dit régulier si pour  $b, c \in \mathbb{P}$  l'égalité  $a \oplus b = a \oplus c$  implique  $b = c$ .
- ii) Si tous les éléments de  $\mathbb{P}$  sont réguliers, on dit que  $\mathbb{P}$  est régulier.
- iii) On dit qu'un semi-anneau est un semi-corps si pour tout  $a \in \mathbb{P}$  non nul, il existe  $a^{-1}$  tel que  $a \odot a^{-1} = 1 = a^{-1} \odot a$ .

**Lemme 1.4.** Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau. Si 1 est régulier, alors chaque élément inversible de  $\mathbb{P}$  est régulier.

*Démonstration.* Supposons que  $a \oplus b = a \oplus c$  avec  $a$  inversible. On prémultiplie par  $a^{-1}$ , d'où en vertu de la distributivité l'égalité  $1 \oplus (a^{-1} \odot b) = 1 \oplus (a^{-1} \odot c)$ . Mais 1 est régulier et donc  $a^{-1} \odot b = a^{-1} \odot c$ . Il suffit de prémultiplier par  $a$  et l'associativité donne  $b = c$ .  $\square$

**Exemple 1.5.**

- a) Tout anneau est un semi-anneau régulier et tout corps est un semi-corps régulier.
- b) Toute algèbre de Boole est un semi-corps. Toutefois, ce ne sera pas nécessairement un semi-corps régulier. En effet, soit  $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, X, \emptyset)$  où  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Posons  $a = \{1, 2\}$ ,  $b = \{3\}$  et  $c = \{2, 3\}$ . On a que  $a \cup b = \{1, 2, 3\} = a \cup c$ , mais  $b \neq c$ .
- c) Soit une famille de semi-anneaux  $\{\mathbb{P}_\alpha\}_\alpha$ . Le produit direct des semi-anneaux de cette famille acquiert une structure de semi-anneau si on définit les opérations par coordonnées. Toutefois, un produit direct de semi-corps n'est pas un semi-corps. En effet, prenons des semi-corps  $\mathbb{P}_{\alpha_1}$  et  $\mathbb{P}_{\alpha_2}$ . Alors, pour tout  $m \in \mathbb{P}_{\alpha_1}$ ,  $(m, 0)$  n'est pas inversible dans  $\mathbb{P}_{\alpha_1} \times \mathbb{P}_{\alpha_2}$ .
- d) Soit  $x_1, \dots, x_n$  des indéterminées sur  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  l'ensemble des polynômes à  $n$  indéterminées. Prenons le sous-ensemble constitué des polynômes ayant une repré-

sensation qui s'écrit sans soustractions, soit

$$\mathbb{Q}_{sf}[x_1, \dots, x_n] = \left\{ f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{j_1 \dots j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \mid a_{j_1 \dots j_n} \geq 0 \right\}.$$

Alors, il est possible de définir le sous-ensemble de  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  constitué des fractions rationnelles qui ont une représentation sans soustractions, soit

$$\mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} \mid \frac{f}{g} \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n), f, g \in \mathbb{Q}_{sf}[x_1, \dots, x_n] \right\}.$$

Par exemple,  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{(x-1)(x^2+4)}{(x-1)(x^2+2x+1)} = \frac{x^2+4}{x^2+2x+1}$  sera dans  $\mathbb{Q}_{sf}(x)$ . On voit facilement que  $\mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n)$  est un semi-anneau régulier pour l'addition et la multiplication dans  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ .

C'est aussi un semi-corps. En effet, soit  $\frac{f}{g} \neq 0$  dans  $\mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n)$ . Alors,  $f \neq 0$  et  $g \neq 0$  et  $\frac{g}{f} \in \mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n)$  non nul. Par conséquent,  $\frac{f}{g} \cdot \frac{g}{f} = 1$  et donc chaque élément non nul possède un inverse.

Soit  $\mathbb{P}$  un sei-corps,  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}$  et  $\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} = \frac{f'(x_1, \dots, x_n)}{g'(x_1, \dots, x_n)}$  une identité dans  $\mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n)$ . Alors, cette identité évaluée en  $p_1, \dots, p_n$  sera vérifiée, c'est-à-dire que  $\frac{f(p_1, \dots, p_n)}{g(p_1, \dots, p_n)} = \frac{f'(p_1, \dots, p_n)}{g'(p_1, \dots, p_n)}$ . On dit que  $\mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n)$  est le semi-corps universel à  $n$  indéterminées.

**Définition 1.6.** On dit que  $\mathbb{P}$  est

i) non-négatif si  $a \oplus b = 0$  implique  $a = 0 = b$  pour tous  $a, b \in \mathbb{P}$ .

ii) intègre si  $a \odot b = 0$  implique  $a = 0$  ou  $b = 0$  pour tous  $a, b \in \mathbb{P}$ .

**Exemple 1.7.** Le semi-anneau  $\mathbb{N}$  est régulier, non-négatif et intègre.

**Lemme 1.8.** Soit  $\mathbb{P}$  un semi-corps. Alors,  $\mathbb{P}$  est intègre.

*Démonstration.* Supposons que  $a \odot b = 0$  et que  $a \neq 0$ . Puisque  $\mathbb{P}$  est un semi-corps,  $a^{-1}$  existe. Alors, en prémultipliant par  $a^{-1}$ , on a  $b = 1 \odot b = a^{-1} \odot 0 = 0$  d'où l'intégrité.  $\square$

On voudra pouvoir passer d'un semi-anneau à un autre, d'où la définition et le lemme suivants.

**Définition 1.9.** Soit  $(\mathbb{P}, \oplus, \odot, 1_{\odot}, 0_{\oplus})$  et  $(\mathbb{P}', \boxplus, \otimes, 1_{\otimes}, 0_{\boxplus})$  deux semi-anneaux. Un morphisme de semi-anneaux est une application  $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$  telle que :

- i)  $f$  induit un morphisme de monoïdes de  $(\mathbb{P}, \oplus)$  à  $(\mathbb{P}', \boxplus)$ , c'est-à-dire  $f(a \oplus b) = f(a) \boxplus f(b)$  pour tous  $a, b \in \mathbb{P}$  avec  $f(0_{\oplus}) = 0_{\boxplus}$ ,
- ii)  $f$  induit un morphisme de monoïdes de  $(\mathbb{P}, \odot)$  à  $(\mathbb{P}', \otimes)$ , c'est-à-dire  $f(a \odot b) = f(a) \otimes f(b)$  pour tous  $a, b \in \mathbb{P}$  avec  $f(1_{\odot}) = 1_{\otimes}$ .

Un isomorphisme de semi-anneaux est un morphisme qui admet un morphisme inverse.

**Lemme 1.10.** Soit  $(\mathbb{P}, \oplus, \odot, 1_{\odot}, 0_{\oplus})$  et  $(\mathbb{P}', \boxplus, \otimes, 1_{\otimes}, 0_{\boxplus})$  deux semi-anneaux et un morphisme de semi-anneaux  $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ . Alors,  $f$  est un isomorphisme si et seulement s'il est bijectif.

*Démonstration.* Comme un isomorphisme admet un morphisme inverse, tout isomorphisme est bijectif.

Réciproquement, supposons que  $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$  est un morphisme bijectif. Alors, il existe une application inverse de  $f$ , notée  $g$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} g(a \boxplus b) &= g(f(g(a)) \boxplus f(g(b))) \\ &= g(f(g(a) \oplus g(b))) \\ &= g(a) \oplus g(b). \end{aligned}$$

et  $g(0_{\boxplus}) = g(f(0_{\oplus})) = 0_{\oplus}$ . De même,  $g(a \otimes b) = g(a) \odot g(b)$  et  $g(1_{\otimes}) = 1_{\odot}$ . Puisque  $g$  est un morphisme,  $f$  est un isomorphisme.  $\square$

**Exemple 1.11.**

a) Les entiers tropicaux  $\mathbb{Z}_{trop} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +, 0, -\infty)$  forment un semi-corps intègre, non-négatif et non régulier. Il est clair que c'est un semi-corps et qu'il est intègre à cause des propriétés de l'addition des entiers. Il est non-négatif, car  $\max(a, b) = -\infty$  implique  $a = -\infty = b$ . Par contre, il n'est pas régulier puisque  $\max(a, 0) = 0 = \max(b, 0)$  pour tous  $a, b \leq 0$ .

De même, on a que  $\check{\mathbb{Z}}_{trop} = (\mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \min, +, 0, \infty)$  est aussi un semi-corps avec les mêmes propriétés que  $\mathbb{Z}_{trop}$ . Ces deux semi-corps sont en fait isomorphes. Il suffit de poser

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}_{trop} &\longrightarrow \check{\mathbb{Z}}_{trop} \\ n &\longmapsto -n \end{aligned}$$

pour obtenir un isomorphisme de semi-corps.

b) Soit  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble d'indéterminées. Soit  $Trop(x)$  le groupe multiplicatif abélien libre sur  $x$  dont la multiplication est notée  $\cdot$ . Alors, tout  $a \in Trop(x)$  possède une écriture unique de la forme  $a = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$ ,  $a_i \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ . Par convention, nous écrivons que  $x_i^\infty = 0$ . Nous définissons  $\oplus$  par

$$\left( \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \right) \oplus \left( \prod_{i=1}^n x_i^{b_i} \right) = \prod_{i=1}^n x_i^{\min(a_i, b_i)}$$

pour tous  $a, b \in Trop(x)$ . Avec cette addition,  $(Trop(x), \oplus, \cdot, \prod_{i=1}^n x_i^0, \prod_{i=1}^n x_i^\infty)$  devient un semi-anneau qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}_{trop}^n$ . En posant

$$\begin{aligned} \phi : Trop(x) &\longrightarrow \mathbb{Z}_{trop}^n \\ \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} &\longmapsto (-a_i)_{i=1}^n, \end{aligned}$$

on obtient que  $\phi^{-1}$  existe, d'où l'isomorphisme.

c) Prenons les semi-corps  $(B, \vee, \wedge, I, O)$  et  $(B, \wedge, \vee, O, I)$  tels que définis dans l'exemple 1.2 b). Les lois de De Morgan sont valides dans les algèbres de Boole et donnent que pour tous  $a, b \in B$ ,  $(a \vee b)' = a' \wedge b'$  et  $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto a' \end{aligned}$$

est un morphisme de semi-corps d'inverse  $f$ . Ainsi, les deux semi-corps induits d'une algèbre de Boole sont toujours isomorphes.

Il serait naturel de se demander si on peut construire un anneau à partir d'un semi-anneau régulier  $\mathbb{P}$ . On appellera ce processus la *symétrisation* de  $\mathbb{P}$ .

On pose d'abord la relation d'équivalence suivante :  $(p, q) \sim (m, n)$  si et seulement si  $p \oplus n = m \oplus q$ . Posons  $\overline{(p, q)}$  la classe d'équivalence de  $(p, q)$  pour  $\sim$ , puis l'ensemble  $\tilde{\mathbb{P}} = (\mathbb{P} \times \mathbb{P}) / \sim = \left\{ \overline{(p, q)} \mid (p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} \right\}$  la *symétrisation* de  $\mathbb{P}$ .

Posons l'application

$$\begin{aligned} i : \mathbb{P} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{P}} \\ x &\longmapsto \overline{(x, 0)} \end{aligned}$$

que nous appellons l'inclusion. Soit  $+$  l'addition induite par  $\mathbb{P}$  sur les coordonnées, c'est-à-dire que  $\overline{(m, n)} + \overline{(p, q)} = \overline{(m \oplus p, n \oplus q)}$ . Alors, on écrit  $-\overline{(m, 0)} = \overline{(0, m)}$  pour l'inverse additif de  $m \in \mathbb{P}$ .

De plus, on pose  $\overline{(p, q)} \cdot \overline{(m, n)} = \overline{((m \odot p) \oplus (n \odot q), (m \odot q) \oplus (n \odot p))}$ . Les opérations  $+$  et  $\cdot$  sont correctement définies. Le lemme suivant démontre qu'avec ces opérations, la symétrisation est un anneau [Sch85].

**Lemme 1.12.** *Le quintuplet  $(\tilde{\mathbb{P}}, +, \cdot, \overline{(1, 0)}, \overline{(0, 0)})$  avec  $+$  et  $\cdot$  tels que définis plus haut est un anneau. En outre, si  $\mathbb{P}$  est commutatif, alors  $\tilde{\mathbb{P}}$  est commutatif.*

*Démonstration.* Vérifions d'abord que les opérations données plus haut sont correctement définies. Soient  $\overline{(m, n)}, \overline{(m', n')}, \overline{(p, q)}, \overline{(p', q')} \in \tilde{\mathbb{P}}$  tels que  $\overline{(m, n)} = \overline{(m', n')}$  et  $\overline{(p, q)} = \overline{(p', q')}$ . Pour  $+$ , montrons que  $\overline{(m, n)} + \overline{(p, q)} = \overline{(m', n')} + \overline{(p', q')}$ . Par définition,  $\overline{(m, n)} = \overline{(m', n')}$  et  $\overline{(p, q)} = \overline{(p', q')}$  impliquent  $m \oplus n' = n \oplus m'$  et  $p \oplus q' = q \oplus p'$ , ce qui donne

$$(m \oplus p) \oplus (n' \oplus q') = (m \oplus n') \oplus (p \oplus q')$$



$$= (n \oplus m') \oplus (q \oplus p')$$

$$= (m' \oplus p') \oplus (n \oplus q)$$

et par conséquent  $\overline{(m \oplus p, n \oplus q)} = \overline{(m' \oplus p', n \oplus q')}$ . Montrons à présent que  $\overline{(p, q)} \cdot \overline{(m, n)} = \overline{(p', q')} \cdot \overline{(m', n')}$ . Or,

$$\overline{(p, q)} \cdot \overline{(m, n)} = \overline{((m \odot p) \oplus (n \odot q), (m \odot q) \oplus (n \odot p))}$$

et

$$\overline{(p', q')} \cdot \overline{(m', n')} = \overline{((m' \odot p') \oplus (n' \odot q'), (m' \odot q') \oplus (n' \odot p'))}.$$

On considère donc l'élément

$$\begin{aligned} & (m \odot p) \oplus (n \odot q) \oplus (m' \odot q') \oplus (n' \odot p') \oplus (m \odot q') \oplus (n \odot p') \\ &= (m \odot (p \oplus q')) \oplus (n \odot q) \oplus (m' \odot q') \oplus (n' \odot p') \oplus (n \odot p') \\ &= (m \odot (p' \oplus q)) \oplus (n \odot q) \oplus (m' \odot q') \oplus (n' \odot p') \oplus (n \odot p') \\ &= (m \odot p) \oplus (m \odot q') \oplus (n \odot q) \oplus (m' \odot q') \oplus (n' \odot p') \oplus (n \odot p') \\ &= ((m \oplus n') \odot p') \oplus (n \odot q) \oplus (m' \odot q') \oplus (n \odot p') \oplus (m \odot q) \\ &= ((m' \oplus n) \odot p') \oplus (n \odot q) \oplus (m' \odot q') \oplus (n \odot p') \oplus (m \odot q) \\ &= (m' \odot p') \oplus (n \odot p') \oplus (n \odot q) \oplus (m' \odot q') \oplus (n \odot p') \oplus (m \odot q) \\ &= (n \odot (p' \oplus q)) \oplus (m' \odot p') \oplus (m' \odot q') \oplus (n \odot p') \oplus (m \odot q) \\ &= (n \odot (p \oplus q')) \oplus (m' \odot p') \oplus (m' \odot q') \oplus (n \odot p') \oplus (m \odot q) \\ &= (n \odot p) \oplus (n \odot q') \oplus (m' \odot p') \oplus (m' \odot q') \oplus (n \odot p') \oplus (m \odot q) \\ &= ((n \oplus m') \odot q') \oplus (n \odot p) \oplus (m' \odot p') \oplus (n \odot p') \oplus (m \odot q) \\ &= ((n' \oplus m) \odot q') \oplus (n \odot p) \oplus (m' \odot p') \oplus (n \odot p') \oplus (m \odot q) \\ &= (n' \odot q') \oplus (m \odot q') \oplus (n \odot p) \oplus (m' \odot p') \oplus (n \odot p') \oplus (m \odot q) \end{aligned}$$

$$= (m \odot q) \oplus (n \odot p) \oplus (m' \odot p') \oplus (n' \odot q') \oplus (m \odot q') \oplus (n \odot p').$$

De plus, puisque  $\mathbb{P}$  est régulier,

$$\begin{aligned} (m \odot p) \oplus (n \odot q) \oplus (m' \odot q') \oplus (n' \odot p') \\ = (m \odot q) \oplus (n \odot p) \oplus (m' \odot p') \oplus (n' \odot q') \end{aligned}$$

d'où  $\overline{((m \odot p) \oplus (n \odot q), (m \odot q) \oplus (n \odot p))} = \overline{((m' \odot p') \oplus (n' \odot q'), (m' \odot q') \oplus (n' \odot p'))}$ .

Cela achève de prouver que l'addition et la multiplication sont correctement définies.

Vérifions que les axiomes d'un anneau sont vérifiés. Soient  $\overline{(m, n)}$ ,  $\overline{(p, q)}$  et  $\overline{(r, s)} \in \tilde{\mathbb{P}}$ .

Montrons d'abord que  $+$  induit une structure de groupe abélien sur  $\tilde{\mathbb{P}}$ . On a que  $+$  est commutative et associative en vertu de la commutativité et de l'associativité de  $\oplus$ .

Il existe un neutre pour  $+$ , soit  $\overline{(0, 0)}$ , puisque  $\overline{(m, n)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(m \oplus 0, n \oplus 0)} = \overline{(m, n)}$ .

Il existe aussi un inverse additif  $-\overline{(m, n)} = \overline{(n, m)}$  pour tout  $\overline{(m, n)} \in \tilde{\mathbb{P}}$ , car  $\overline{(m, n)} + \overline{(n, m)} = \overline{(m \oplus n, n \oplus m)} = \overline{(0, 0)}$  et ainsi,  $(\tilde{\mathbb{P}}, +)$  est un groupe abélien.

De plus,  $\cdot$  est associative, car

$$\begin{aligned} \overline{(m, n)} \cdot \left( \overline{(p, q)} \cdot \overline{(r, s)} \right) &= \overline{(m, n)} \cdot \overline{((r \odot p) \oplus (s \odot q), (r \odot q) \oplus (s \odot p))} \\ &= \overline{(((r \odot p) \oplus (s \odot q)) \odot m) \oplus (((r \odot q) \oplus (s \odot p)) \odot n)}, \\ &= \overline{(((r \odot p) \oplus (s \odot q)) \odot n) \oplus (((r \odot q) \oplus (s \odot p)) \odot m)} \\ &= \overline{((r \odot p \odot m) \oplus (s \odot q \odot m) \oplus (r \odot q \odot n) \oplus (s \odot p \odot n))}, \\ &= \overline{(r \odot p \odot n) \oplus (s \odot q \odot n) \oplus (r \odot q \odot m) \oplus (s \odot p \odot m)} \\ &= \overline{((r \odot ((p \odot m) \oplus (q \odot n))) \oplus (s \odot ((p \odot n) \oplus (q \odot m))))}, \\ &= \overline{((r \odot ((p \odot n) \oplus (q \odot m))) \oplus (s \odot ((p \odot m) \oplus (q \odot n))))} \\ &= \overline{((p \odot m) \oplus (q \odot n), (p \odot n) \oplus (q \odot m))} \cdot \overline{(r, s)} \end{aligned}$$

$$= \left( \overline{(m, n)} \cdot \overline{(p, q)} \right) \cdot \overline{(r, s)}$$

Le neutre pour la multiplication est  $\overline{(1, 0)}$ . En effet,

$$\overline{(m, n)} \cdot \overline{(1, 0)} = \overline{((1 \odot m) \oplus (0 \odot n), (1 \odot n) \oplus (0 \odot m))} = \overline{(m, n)},$$

$$\overline{(1, 0)} \cdot \overline{(m, n)} = \overline{((m \odot 1) \oplus (n \odot 0), (m \odot 0) \oplus (n \odot 1))} = \overline{(m, n)}.$$

Il ne reste qu'à montrer la distributivité à gauche et à droite.

$$\begin{aligned} \overline{(m, n)} \cdot \left( \overline{(p, q)} \oplus \overline{(r, s)} \right) &= \overline{(m, n)} \cdot \overline{(p \oplus r, q \oplus s)} \\ &= \overline{(((p \oplus r) \odot m) \oplus ((q \oplus s) \odot n), ((p \oplus r) \odot n) \oplus ((q \oplus s) \odot m))} \\ &= \overline{((p \odot m) \oplus (r \odot m) \oplus (q \odot n) \oplus (s \odot n), \\ &\quad (p \odot n) \oplus (r \odot n) \oplus (q \odot m) \oplus (s \odot m))} \\ &= \overline{((p \odot m) \oplus (q \odot n), (p \odot n) \oplus (q \odot m))} + \\ &\quad \overline{((r \odot m) \oplus (s \odot n), (r \odot n) \oplus (s \odot m))} \\ &= \overline{(m, n)} \cdot \overline{(p, q)} + \overline{(m, n)} \cdot \overline{(r, s)} \end{aligned}$$

De même, on vérifie que la distributivité à droite est vérifiée et donc la symétrisation est un anneau.

Supposons que  $\mathbb{P}$  est commutatif. On prétend que  $\widetilde{\mathbb{P}}$  est aussi commutatif. En effet,

$$\begin{aligned} \overline{(p, q)} \cdot \overline{(m, n)} &= \overline{((m \odot p) \oplus (n \odot q), (m \odot q) \oplus (n \odot p))} \\ &= \overline{((p \odot m) \oplus (q \odot n), (p \odot n) \oplus (q \odot m))} \\ &= \overline{(m, n)} \cdot \overline{(p, q)}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

**Exemple 1.13.** Soit l'ensemble des nombres naturels considéré comme semi-anneau régulier. On a donc  $(p, q) \sim (m, n)$  si et seulement si  $p + n = m + q$ . Montrons que  $\mathbb{Z} \cong \widetilde{\mathbb{N}}$ . Soit l'application

$$f : \frac{\widetilde{\mathbb{N}}}{(m, n)} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(m, n) \longmapsto m - n.$$

Prouvons que  $f$  est un morphisme d'anneaux. Soient  $\overline{(m, n)}, \overline{(p, q)} \in \widetilde{\mathbb{N}}$ . Alors,

$$\begin{aligned} f\left(\overline{(m, n)} + \overline{(p, q)}\right) &= f\overline{(m + p, n + q)} \\ &= (m + p) - (n + q) \\ &= (m - n) + (p - q) \\ &= f\overline{(m, n)} + f\overline{(p, q)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f\left(\overline{(m, n)} \cdot \overline{(p, q)}\right) &= f\overline{(pm + qn, pn + qm)} \\ &= (pm + qn) - (pn + qm) \\ &= (m - n) \cdot (p - q) \\ &= f\overline{(m, n)} \cdot f\overline{(p, q)}. \end{aligned}$$

Enfin,  $f\overline{(1, 0)} = 1 - 0 = 1$  et  $f$  est donc un morphisme d'anneaux. On prétend que  $f$  est un isomorphisme. Tout d'abord,  $f$  est injectif car  $f\overline{(m, n)} = m - n = 0$  implique  $m = n$  et donc  $\overline{(m, n)} = \overline{(0, 0)}$ . Ainsi, le noyau de  $f$  est nul. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , il existe  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $x = m - n$ . En effet, si  $x \in \mathbb{Z}^+$ , alors il suffit de poser  $m = x$  et  $n = 0$ . Par contre, si  $x \in \mathbb{Z}^-$ , il suffit de poser  $m = 0$  et  $n = -x$ . Donc  $x = m - n = f\overline{(m, n)}$ . Ainsi,  $f$  est surjectif et par conséquent bijectif.

Remarquons que c'est une construction très semblable à celle des rationnels à partir des entiers, ou de façon plus générale à la construction du corps de fractions d'un anneau intègre.

## 1.2 Frises sur semi-anneaux

Les frises introduites par Coxeter dans [Cox71] sont un outil combinatoire qui nous sera très utile. Mais avant de les définir, donnons quelques définitions et propriétés des carquois nécessaires à leur compréhension.

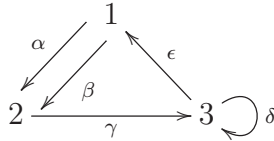
**Définition 1.14.** *Un carquois  $\Gamma$  est un quadruplet  $(\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$  tel que  $\Gamma_0$  est un ensemble dont les éléments sont appelés points et  $\Gamma_1$  est un ensemble dont les éléments sont appelés flèches. De plus,  $s, t : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_0$  sont des applications qui à toute flèche associent respectivement sa source et son but.*

Intéressons-nous à quelques-unes de leurs propriétés.

**Définition 1.15.** *Soit  $\Gamma$  un carquois.*

- i) *À tout point  $x$ , on associe l'ensemble  $x^+ = \{\alpha \in \Gamma_1 \mid s(\alpha) = x\}$  des flèches sortant de  $x$  et l'ensemble  $x^- = \{\alpha \in \Gamma_1 \mid t(\alpha) = x\}$  des flèches entrant dans  $x$ .*
- ii) *On dit que le carquois  $\Gamma$  est localement fini si pour tout point  $x$  de celui-ci, les ensembles  $x^+$  et  $x^-$  sont finis. On dit qu'il est fini si, en plus,  $\Gamma_0$  est fini.*
- iii) *On dit que  $\Gamma$  est acyclique s'il n'existe pas de suite de flèches  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  telles que  $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$  et  $t(\alpha_n) = s(\alpha_1)$ . Une telle suite de flèches est appelée un cycle de longueur  $n$ .*
- iv) *On dit que  $\Gamma$  est connexe si le graphe sous-jacent  $\bar{\Gamma}$  de  $\Gamma$ , obtenu en oubliant l'orientation des flèches, est lui aussi connexe.*

**Exemple 1.16.** *Soit le carquois suivant.*



*On remarque que ce carquois est fini, mais qu'il n'est pas acyclique car  $\delta$  est un cycle de longueur 1, appelé boucle, et  $\alpha\gamma\epsilon$  ou  $\beta\gamma\epsilon$  forment des cycles de longueur 3.*

On s'intéresse maintenant à un type précis de carquois, que la définition suivante introduit sous le nom de carquois à translation.

**Définition 1.17.** *Soit  $\Gamma$  un carquois localement fini et sans boucles.*

- i) Il est dit carquois à translation s'il existe  $\Gamma'_0, \Gamma''_0 \subset \Gamma_0$  et une bijection partiellement définie  $\tau : \Gamma'_0 \longrightarrow \Gamma''_0$  appelée translation tels que pour tout  $x \in \Gamma'_0$ , le nombre de flèches dans  $x^-$  et de source  $y$  est égal au nombre de flèches dans  $(\tau x)^+$  et de but  $y$ .*
- ii) Un carquois à translation est dit stable si  $\tau$  est une bijection  $\tau : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_0$ .*

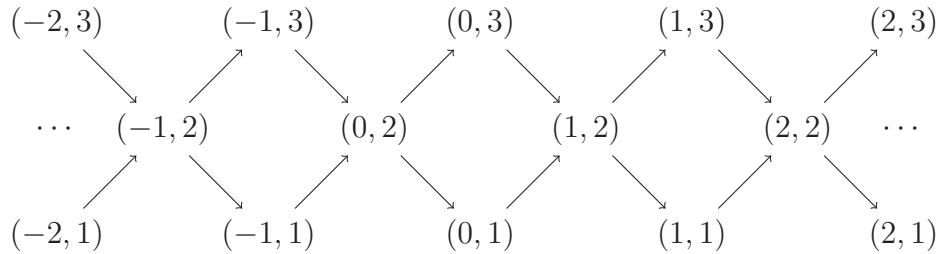
**Exemple 1.18.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique. Sa répétition, notée  $\mathbb{Z}Q$ , est un carquois défini par*

$$(\mathbb{Z}Q)_0 = \{ (n, i) \mid n \in \mathbb{Z}, i \in Q_0 \}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}Q)_1 = & \{ (n, \alpha) : (n, i) \longrightarrow (n, j) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha : i \longrightarrow j \} \cup \\ & \{ (n, \alpha') : (n-1, j) \longrightarrow (n, i) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha : i \longrightarrow j \} \end{aligned}$$

Avec  $\tau(n, i) = (n-1, i)$ , on voit que c'est un carquois à translation stable.

Par exemple, posons  $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ . Alors,  $\mathbb{Z}Q$  est



On remarque que la définition de carquois à translation implique une bijection entre  $x^-$  et  $(\tau x)^+$  pour tout point  $x \in \Gamma'_0$ . Et ainsi, pour chaque flèche  $y \xrightarrow{\alpha} x$ , on peut lui associer la flèche  $\tau x \xrightarrow{\beta} y$ , ce qui entraîne la définition suivante.

**Définition 1.19.** Soit  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation. Une bijection partiellement définie

$$\begin{array}{ccc} \sigma : & \Gamma'_1 & \longrightarrow & \Gamma''_1 \\ & \alpha & \longmapsto & \sigma\alpha \end{array}$$

où  $\Gamma'_1, \Gamma''_1 \subset \Gamma_1$ ,  $\alpha$  est une flèche  $y \xrightarrow{\alpha} x$  telle que  $\tau x$  existe et  $\sigma\alpha$  est une flèche  $\tau x \xrightarrow{\sigma\alpha} y$ , est appelée une polarisation.

Posons maintenant la définition d'un morphisme de carquois.

**Définition 1.20.** Soit  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$  et  $\Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1, s', t')$  deux carquois. Un morphisme de carquois est une application  $f = (f_0, f_1) : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$  où  $f_0$  et  $f_1$  sont des applications  $f_0 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma'_0$ ,  $f_1 : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma'_1$  telles que  $s'(f_1(\alpha)) = f_0(s(\alpha))$  et  $t'(f_1(\alpha)) = f_0(t(\alpha))$  pour tout  $\alpha \in \Gamma_1$ .

En clair, pour  $y \xrightarrow{\alpha} x$  dans  $\Gamma$ , nous avons  $f_0(y) \xrightarrow{f_1(\alpha)} f_0(x)$  dans  $\Gamma'$ . Un isomorphisme de carquois est un morphisme qui admet un morphisme inverse.

Remarquons que si  $\Gamma$  est stable, alors la translation  $\tau$  induit un morphisme  $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ . En effet, la bijection  $\tau : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_0$  implique l'existence de  $\sigma^2 : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1$  qui est elle aussi bijective. Ainsi, nous avons que  $f = (\tau, \sigma^2) : \Gamma \longrightarrow \Gamma$  est un isomorphisme de carquois, en vertu du lemme suivant.

**Lemme 1.21.** Soit  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$  et  $\Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1, s', t')$  deux carquois et l'application  $f = (f_0, f_1) : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$  un morphisme de carquois. Alors,  $f = (f_0, f_1)$  est un isomorphisme si et seulement si  $f_0$  et  $f_1$  sont bijectives.

*Démonstration.* Comme un isomorphisme admet un morphisme inverse,  $f_0$  et  $f_1$  admettent des applications inverses et sont par conséquent bijectives.

Réciproquement, si  $f_0$  et  $f_1$  sont bijectives, il existe des applications inverses, notées  $g_0$  et  $g_1$ . Nous avons alors

$$s(g_1(f_1(\alpha))) = s(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= g_0(f_0(s(\alpha))) \\
&= g_0(s'(f_1(\alpha))).
\end{aligned}$$

De même,  $t(g_1(f_1(\alpha))) = g_0(t'(f_1(\alpha)))$  et  $g = (g_0, g_1)$  est un morphisme de carquois. Ainsi,  $f$  est un isomorphisme.  $\square$

Il devient possible d'associer les points qui peuvent être obtenus par une suite de translations. De même, on associe les flèches obtenues à partir d'une suite de polarisations. Notons que  $\tau^n$  représente une suite de  $n$  translations consécutives et  $\sigma^n$  est une suite de  $n$  polarisations pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Définition 1.22.** Soit  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation.

i) Soit  $x \in \Gamma_0$ . La  $\tau$ -orbite de  $x$  est l'ensemble

$$\mathcal{O}(x) = \{ y \in \Gamma_0 \mid \text{il existe un } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y = \tau^n x \}.$$

ii) Soit  $\alpha \in \Gamma_1$ . La  $\sigma$ -orbite de  $\alpha$  est l'ensemble

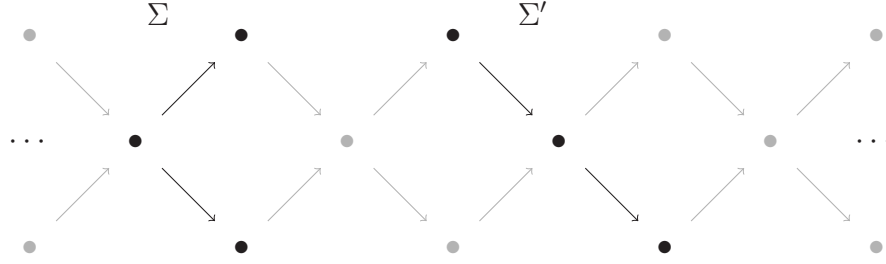
$$\mathcal{O}(\alpha) = \{ \beta \in \Gamma_1 \mid \text{il existe un } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \beta = \sigma^n \alpha \}.$$

iii) Une section  $\Sigma$  dans  $\Gamma$  est un sous-carquois plein, connexe et acyclique de  $\Gamma$  tel que pour tout  $x \in \Gamma_0$ , il existe un unique  $y \in \Sigma_0$  tel que  $y \in \mathcal{O}(x)$  et pour toute suite de flèches  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  avec  $s(\alpha_1), t(\alpha_n) \in \Sigma_0$ , on a  $t(\alpha_i) \in \Sigma_0$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ .

Rappelons qu'un sous-carquois est plein si l'ensemble de ses flèches est constitué des flèches dont la source et le but sont dans l'ensemble des points de ce sous-carquois. Il est aussi à noter qu'une section est entièrement déterminée par ses points.

**Exemple 1.23.** Soit le carquois à translation  $\mathbb{Z}Q$  où  $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$





Les sous-carquois  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  illustrés dans la figure sont deux sections de  $\mathbb{Z}Q$ .

Nous pouvons maintenant définir la relation de frise. Fixons un semi-anneau  $(\mathbb{P}, \oplus, \odot, 1_\odot, 0_\oplus)$ .

**Définition 1.24.** Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau. Une  $\mathbb{P}$ -frise sur un carquois à translation  $(\Gamma, \tau)$  est une application  $f : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{P}$  telle que pour tout  $x \in \Gamma_0$  tel que  $\tau x$  est défini, on a

$$f(x) \odot f(\tau x) = \left( \bigodot_{\alpha \in x^-} f(s(\alpha)) \right) \oplus 1$$

Par convention, un produit vide est égal à 1.

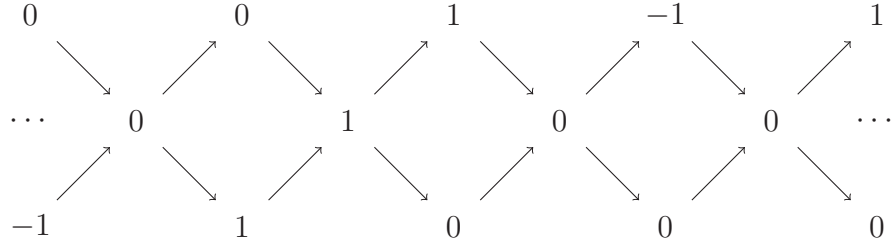
On dira qu'une  $\mathbb{P}$ -frise est *invertible* si  $f(x)$  est un élément inversible pour  $\odot$  de  $\mathbb{P}$  pour tout  $x \in \Gamma_0$  et qu'elle est *sans zéro* si  $f(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \Gamma_0$ . Il est utile de noter qu'une  $\mathbb{P}$ -frise invertible est sans zéro, mais que l'inverse n'est pas vrai.

**Exemple 1.25.**

- a) Si on prend  $\mathbb{P}$  comme étant le corps  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 1, 0)$  la relation de la définition 1.24 est celle étudiée dans [Cox71, CC73a, CC73b]. De manière plus générale, on peut supposer que  $\mathbb{P}$  est un anneau commutatif.
- b) Reprenons l'exemple 1.23 et posons  $\mathbb{P} = \mathbb{Z}_{trop}$ . Alors, la fonction  $f : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{trop}$  sera telle que

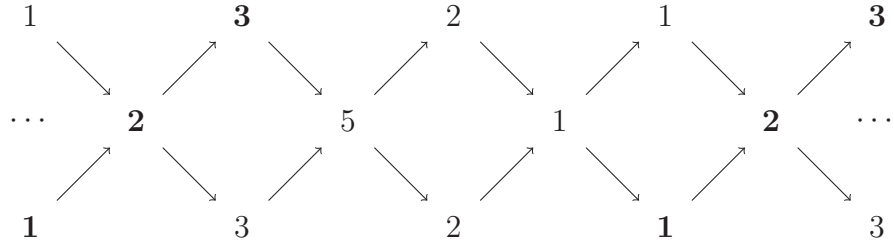
$$f(x) + f(\tau x) = \max \left( \sum_{\alpha \in x^-} f(s(\alpha)), 0 \right).$$

Ainsi,



est une  $\mathbb{Z}_{trop}$ -frise.

c) Reprenons le carquois à translation de l'exemple 1.23 et prenons  $\mathbb{P} = \mathbb{N}$  avec les opérations usuelles. Voici une  $\mathbb{N}$ -frise.



C'est une frise sans zéro, mais aucune valeur plus grande que 1 n'est inversible dans le semi-anneau  $\mathbb{N}$ .

### Remarque 1.26.

a) Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau non-trivial et non-négatif et  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation stable. Alors, toute  $\mathbb{P}$ -frise  $f$  sera sans zéro. En effet, supposons au contraire qu'il existe un  $x \in \Gamma_0$  tel que  $f(x) = 0$ . Alors, on aura que

$$0 = f(x) \odot f(\tau x) = \left( \bigodot_{\alpha \in x^-} f(s(\alpha)) \right) \oplus 1.$$

En vertu de la non-négativité, cela implique  $\bigodot_{\alpha \in x^-} f(s(\alpha)) = 0$  et du coup,  $0 = 0 \oplus 1 = 1$ , ce qui est possible seulement dans le semi-anneau trivial  $\mathbb{P} = \{0\}$ . Ainsi, on a une contradiction et  $f(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \Gamma_0$ .

b) Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau intègre et régulier,  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation stable et  $f$  une  $\mathbb{P}$ -frise inversible sur ce dernier. Alors, pour tout  $x \in \Gamma_0$ ,  $f(\tau x) \neq f(x)^{-1}$ . En effet, si on suppose que  $f(\tau x) = f(x)^{-1}$ , on a que

$$1 = f(x) \odot f(\tau x) = \left( \bigodot_{\alpha \in x^-} f(s(\alpha)) \right) \oplus 1.$$

Puisque  $\mathbb{P}$  est régulier,  $\bigodot_{\alpha \in x^-} f(s(\alpha)) = 0$ . De plus, l'intégrité de  $\mathbb{P}$  implique qu'il existe une flèche  $\alpha$  dans  $x^-$  telle que  $f(s(\alpha)) = 0$ , mais  $f$  est inversible, donc sans zéro. On a ainsi une contradiction et  $f(\tau x) \neq f(x)^{-1}$ .

Ce résultat n'est pas valide si le semi-anneau n'est pas régulier, voir l'exemple 1.25 b).

Le lemme suivant établit un lien entre frise et section de carquois.

**Lemme 1.27.** *Soit  $\mathbb{P}$  un semi-corps non-négatif et  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation stable contenant une section finie  $\Sigma$  tel que  $\Gamma = \mathbb{Z}\Sigma$  avec  $\Sigma_0 = \{t_1, \dots, t_n\}$ . Alors, il existe une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{P}\text{-frises sur } (\Gamma, \tau)\} & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{P} \setminus \{0\})^n \\ f & \longmapsto & (f(t_1), \dots, f(t_n)) \end{array}$$

*Démonstration.* En vertu de la remarque 1.26 a), toute  $\mathbb{P}$ -frise sera sans zéro. Ainsi, il suffit de montrer la bijectivité. La surjectivité découle du fait que l'on construit la frise récursivement avec le  $n$ -uplet donné. En effet, soit  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{P} \setminus \{0\})^n$  et posons  $a_i = f(t_i)$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Nous prolongerons  $f$  à une  $\mathbb{P}$ -frise sur  $\Gamma$ . Soit  $x \in \Sigma_0$  tel que pour tout  $\alpha \in x^-$ ,  $s(\alpha) \in \Sigma_0$ . Alors posons

$$f(\tau x) = f(x)^{-1} \odot \left( \left( \bigodot_{\alpha \in x^-} f(s(\alpha)) \right) \oplus 1 \right)$$

et de même on définit  $f(\tau^{-1}x)$  dans le cas où pour tout  $\alpha \in x^+$ ,  $t(\alpha) \in \Sigma_0$ . On prolongera ainsi  $f$  à tous les points de  $\Gamma$  et il s'ensuit que  $f$  respecte la relation de frise partout sur  $\Gamma$ .

Pour l'injectivité, supposons que  $(f(t_1), \dots, f(t_n)) = (g(t_1), \dots, g(t_n))$ . Ainsi, on a que  $f = g$  sur  $\Sigma$ . Puisque ce sont des frises sans zéro sur un semi-corps, on procède par récurrence comme dans le cas des frises classiques [CC73a, CC73b]. Supposons ainsi que

$f = g$  sur un sous-carquois  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  contenant  $\Sigma$  et soit  $x \in \Gamma'_0$  tel que  $\tau x \notin \Gamma'_0$ . Supposons aussi que pour tout  $\alpha \in x^-$ ,  $s(\alpha) \in \Gamma'_0$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} f(\tau x) &= f(x)^{-1} \odot \left( \left( \bigodot_{\alpha \in x^-} f(s(\alpha)) \right) \oplus 1 \right) \\ &= g(x)^{-1} \odot \left( \left( \bigodot_{\alpha \in x^-} g(s(\alpha)) \right) \oplus 1 \right) \\ &= g(\tau x) \end{aligned}$$

et de même, on a  $f(\tau^{-1}x) = g(\tau^{-1}x)$  si pour tout  $\alpha \in x^+$ ,  $t(\alpha) \in \Gamma'_0$ . Cela implique que  $f = g$  sur  $\Gamma$ , d'où la bijectivité.  $\square$

**Lemme 1.28.** *Soit  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation localement fini et  $f$  une  $\mathbb{P}$ -frise sur celui-ci. Alors, pour tout semi-anneau  $(\mathbb{P}', \boxplus, \boxtimes)$  et tout morphisme de semi-anneaux  $\epsilon : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ , l'application  $\epsilon \circ f$  est une  $\mathbb{P}'$ -frise sur ce même carquois.*

*Démonstration.* Soit  $x \in \Gamma_0$  tel que  $\tau x$  est défini. Alors, on a

$$\begin{aligned} (\epsilon \circ f)(x) \boxtimes (\epsilon \circ f)(\tau x) &= \epsilon(f(x) \odot f(\tau x)) \\ &= \epsilon \left( \left( \bigodot_{\alpha \in x^-} f(s(\alpha)) \right) \oplus 1 \right) \\ &= \left( \bigotimes_{\alpha \in x^-} (\epsilon \circ f)(s(\alpha)) \right) \boxplus 1 \end{aligned}$$

$\square$

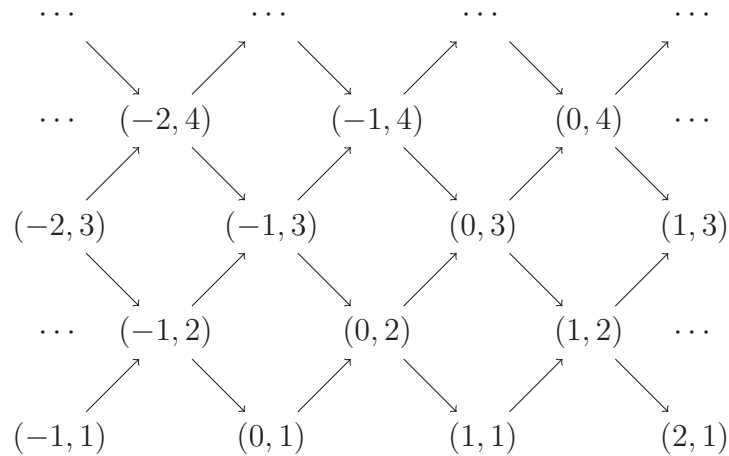
# CHAPITRE 2

## Généralisation des frises classiques sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ aux semi-anneaux

Dans ce chapitre, on s'intéresse à un carquois à translation particulier,  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ . En effet, le carquois  $\mathbb{A}_\infty$ ,

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \longrightarrow \cdots,$$

admet la répétition suivante.



On définit la translation  $\tau$  par  $\tau(i, l) = (i - 1, l)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $l \in \mathbb{N}$ .

**Définition 2.1.**

i) Soit le carquois  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ , sa translation  $\tau$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 1$ . Alors la  $\tau^n$ -orbite de  $x$  est l'ensemble

$$\mathcal{O}^n(x) = \{ y \in (\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty)_0 \mid y = \tau^{kn}x, k \in \mathbb{Z} \}$$

pour tout  $x \in (\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty)_0$  et la  $\sigma^n$ -orbite de  $\alpha$  est l'ensemble

$$\mathcal{O}^n(\alpha) = \{ \beta \in (\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty)_1 \mid \beta = \sigma^{2kn}\alpha, k \in \mathbb{Z} \}$$

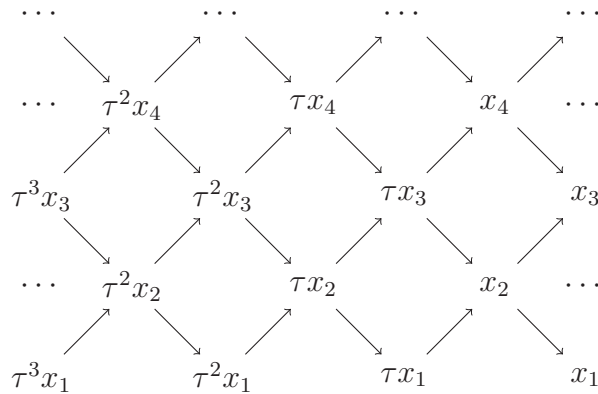
pour tout  $\alpha \in \Gamma_1$ .

ii) Le tube stable de rang  $n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , noté  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty / \langle \tau^n \rangle$ , est le carquois formé des  $\tau^n$ -orbites et des  $\sigma^n$ -orbites de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ , c'est-à-dire que pour tout point  $x \in (\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty)_0$ , il existe un unique  $y \in (\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty / \langle \tau^n \rangle)_0$  tel que  $y = \mathcal{O}^n(x)$  et pour toute flèche  $\alpha \in (\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty)_1$ , il existe une unique  $\beta \in (\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty / \langle \tau^n \rangle)_1$  tel que  $\beta = \mathcal{O}^n(\alpha)$ .

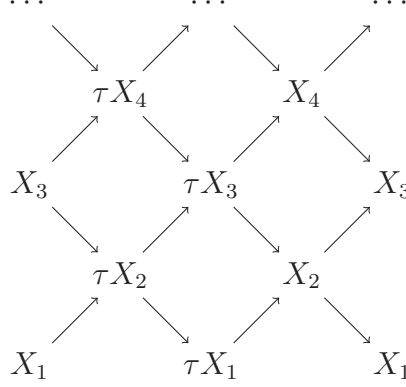
iii) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathbb{P}$  un semi-anneau. Une  $\mathbb{P}$ -frise  $f$  sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  est dite  $\tau^n$ -périodique si  $f(\tau^n x) = f(x)$ .

Il découle de cette définition que toute frise sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty / \langle \tau^n \rangle$  induit une frise  $\tau^n$ -périodique sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ .

**Exemple 2.2.** Soit le carquois  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  suivant.



Posons  $n = 2$ . On aura alors le carquois  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty / \langle \tau^2 \rangle$  qui s'illustre comme suit.



C'est un tube stable de rang 2, en vertu de la définition 2.1 ii).

## 2.1 Rayons et points accessibles de $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$

Reprenons la notation définie précédemment pour  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ .

### Définition 2.3.

i) Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , le  $i^e$  rayon dans  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  est la section définie par l'ensemble

$$\mathcal{R}_i = \{(i, l) \mid l > 0\}.$$

ii) Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , le  $i^e$  corayon dans  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  est la section définie par l'ensemble

$$\mathcal{R}^i = \{(j, l) \mid j + l = i + 1, l > 0\}.$$

iii) Soit un rayon  $\mathcal{R}_i$ , on définit son cône à droite comme étant l'ensemble

$$\mathcal{R}_{\geq i} = \{(j, l) \mid l > 0, j \geq i\}.$$

iv) Soit un corayon  $\mathcal{R}^i$ , on définit son cône à gauche comme étant l'ensemble

$$\mathcal{R}^{\leq i} = \{(j, l) \mid l > 0, j + l \leq i + 1\}.$$

Les figures 2.1 et 2.2 illustrent ces définitions. Remarquons que toute section de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  est un carquois isomorphe à une orientation de  $\mathbb{A}_\infty$  et pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}^i$  sont linéairement orientés. Un autre type de section est illustré dans la figure 2.3, soit une section avec une orientation alternée, dite en *zig-zag*, attachée au point  $(i, 1)$  et notée  $\mathcal{Z}_i$ .

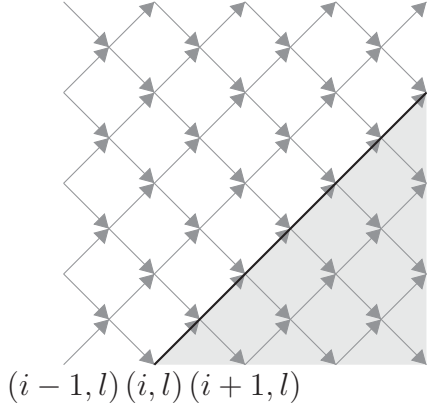


Figure 2.1 – Le rayon qui commence  $(i, l)$  et son cône à droite en gris.

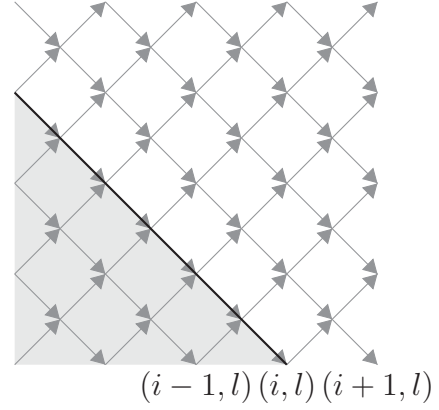


Figure 2.2 – Le corayon qui se termine en  $(i, l)$  et son cône à gauche en gris.

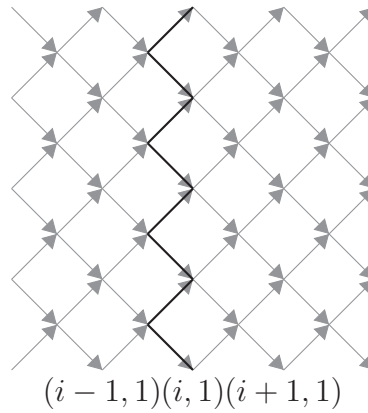


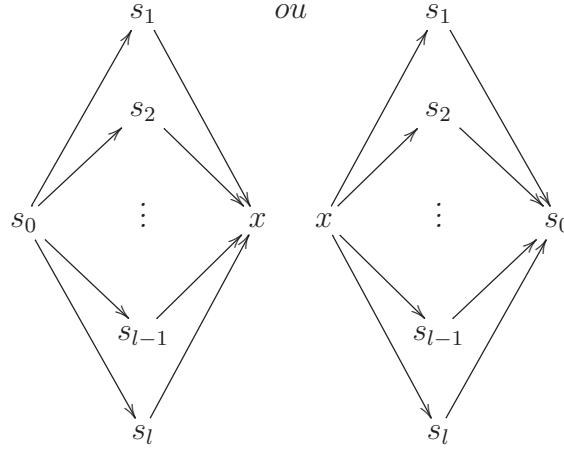
Figure 2.3 – Un des deux zig-zags qui commencent en  $(i, 1)$ .

**Définition 2.4.** Soit le carquois  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ . On appelle la bouche de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  l'ensemble des points  $(i, 1)_{i \in \mathbb{Z}}$  qui forment la rangée inférieure de ce carquois.



**Définition 2.5.** Soit  $(\Gamma, \tau)$  un carquois à translation avec un sous-ensemble de points  $\Sigma$ .

i) Un point  $x \in \Gamma_0$  est adjacent à  $\Sigma$  s'il existe une maille dans  $(\Gamma, \tau)$  d'une des deux formes suivantes et telle que  $s_0, \dots, s_l \in \Sigma$ .



ii) Posons  $\Sigma(0) = \Sigma$ ,  $\Sigma(1) = \Sigma \cup \{x \in \Gamma_0 \mid x \text{ est adjacent à } \Sigma\}$  et de manière récursive,  $\Sigma(n) = (\Sigma(n-1))(1)$ . On dira qu'un point  $x \in \Gamma_0$  est accessible de  $\Sigma$  s'il existe un  $n \geq 0$  tel que  $x \in \Sigma(n)$ .

À la lumière de la définition 2.5, il est possible de déterminer la configuration générale des points accessibles d'une section  $\Sigma$  de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ , représentés dans les figures 2.4 et 2.5. La première figure montre les points accessibles d'une section complète, alors que la deuxième figure montre les points accessibles d'une section près de la bouche de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ . Les points en évidence ne sont qu'un exemple de points accessibles.

Ces figures permettent en fait de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour dire qu'un point est accessible, donnée dans le prochain lemme. Mais d'abord, voici une définition qui explicitera certains ensembles de points qui seront présents dans le lemme.

**Définition 2.6.** Soit le point  $(i, l)$  de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ ,  $(i, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\mathcal{R}_i$  le rayon passant par ce point et  $\mathcal{R}^{i+l-1}$  le corayon passant par ce point.

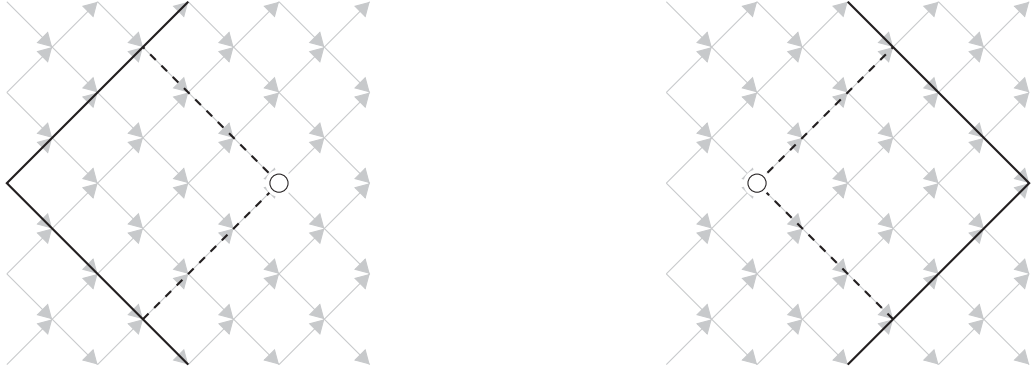


Figure 2.4 – Points accessibles d’une section qui change d’orientation

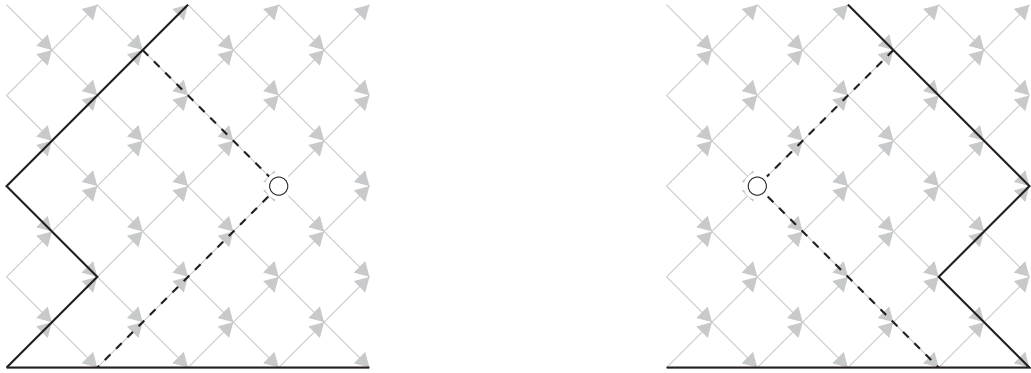


Figure 2.5 – Points accessibles près du bas de la section

- i) Le sous-ensemble  $\{(i, k) \mid k \geq l\}$  de  $\mathcal{R}_i$  est la partie supérieure du rayon passant par  $(i, l)$ .
- ii) Le sous-ensemble  $\{(i + l - j, j) \mid j \geq l\}$  de  $\mathcal{R}^{i+l-1}$  est la partie supérieure du corayon passant par  $(i, l)$ .

**Exemple 2.7.** La partie supérieure du rayon passant par le point  $(i, 1)$  est le rayon  $\mathcal{R}_i$ . Pour le point  $(i, 2)$ , la partie supérieure du rayon passant par celui-ci est l’ensemble  $\mathcal{R}_i \setminus \{(i, 1)\}$ .

**Lemme 2.8.** Soit  $\Sigma$  une section de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  et un point  $(i, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0}$ . Alors  $(i, l)$  est accessible de  $\Sigma$  si et seulement  $\Sigma_0 \cap (\{(i + l - j, j) \mid j \geq l\} \cup \{(i, k) \mid k \geq l\}) \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* Avec les concepts introduits dans la définition 2.6, nous reformulons le lemme comme suit. Nous souhaitons prouver qu'un point de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  est accessible de  $\Sigma$  si et seulement si la partie supérieure du rayon ou du corayon passant par ce point coupe  $\Sigma$ .

Si  $(i, l)$  est un point tel que la partie supérieure du rayon ou du corayon passant par ce point coupe  $\Sigma$ , alors il est dans une configuration semblable à celles présentées dans les figures 2.4 ou 2.5. Par conséquent,  $(i, l)$  est accessible de  $\Sigma$ .

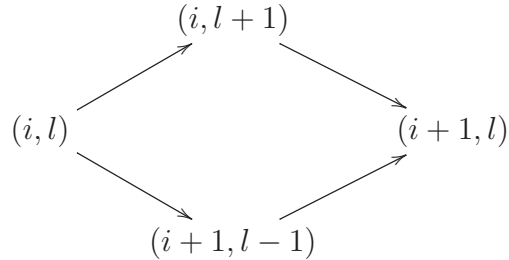
Montrons maintenant que pour tout point accessible, la partie supérieure du rayon ou du corayon coupe  $\Sigma$ . Supposons que  $(i, l)$  est un point accessible de  $\Sigma$ . Alors il existe un  $n \geq 0$  tel que  $(i, l) \in (\Sigma(n))_0$ . Procédons par récurrence sur  $n$  pour montrer que  $\Sigma_0 \cap (\{(i + l - j, j) \mid j \geq l\} \cup \{(i, k) \mid k \geq l\}) \neq \emptyset$ . Si  $n = 0$ , il est clair que l'énoncé est vérifié. Supposons maintenant que pour tout point dans  $\Sigma(n)$ , l'énoncé est vérifié pour un  $n \geq 0$  fixé. Montrons que c'est aussi le cas pour les points de  $\Sigma(n + 1)$ . La définition 2.5 indique

$$\Sigma(n + 1) = (\Sigma(n))(1) = \Sigma(n) \cup \{x \in (\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty)_0 \mid x \text{ est adjacent à } \Sigma(n)\}.$$

Si  $(i, l)$  est dans  $\Sigma(n)$ , le résultat est trivial. Supposons donc que

$$(i, l) \in \{x \in (\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty)_0 \mid x \text{ est adjacent à } \Sigma(n)\}.$$

Supposons sans perte de généralité que



où  $(i, l + 1)$ ,  $(i + 1, l - 1)$ ,  $(i + 1, l) \in \Sigma(n)$ . Ainsi, pour chacun de ces points, la partie supérieure du rayon ou du corayon passant par ce point coupe  $\Sigma$ . De plus, en vertu de la

définition récursive de  $\Sigma(n)$  et  $\Sigma(n+1)$ , c'est la partie supérieure du rayon de ces points qui coupe  $\Sigma$  dans le cas illustré. Il en résulte que la partie supérieure du rayon passant en  $(i, l)$  coupe  $\Sigma$  et  $\Sigma_0 \cap (\{(i+l-j, j) \mid j \geq l\} \cup \{(i, k) \mid k \geq l\}) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Remarque 2.9.** *Il découle du résultat précédent que les points accessibles d'un rayon  $\mathcal{R}^i$  sont les points de son cône à droite et dualement, les points accessibles d'un corayon  $\mathcal{R}_i$  sont les points de son cône à gauche. De plus, le lemme précédent implique que dans le cas d'une section en zig-zag, tous les points de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  sont accessibles.*

Voici un lemme qui établit un lien entre sections, points accessibles et frises sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ .

**Lemme 2.10.** *Soit  $\mathbb{P}$  un semi-corps non-négatif,  $\Sigma$  une section de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  et  $\Sigma(\infty)$  l'ensemble des points accessibles de  $\Sigma$ . Alors il existe une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{P}\text{-frises sur } \Sigma(\infty)\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{suites infinies d'éléments inversibles de } \mathbb{P}\} \\ f & \longmapsto & (f(i, l))_{(i, l) \in \Sigma} \end{array} .$$

*Démonstration.* En vertu de la remarque 1.26 a), on a que toute  $\mathbb{P}$ -frise est sans zéro.

Soit  $f$  une  $\mathbb{P}$ -frise telle que  $f(i, l)$  est inversible pour tout  $(i, l) \in \Sigma$ . La surjectivité est claire en vertu de la construction de la frise et du fait que les points accessibles de  $\Sigma$  sont les points de  $\Sigma(\infty)$ .

Montrons maintenant l'injectivité. Supposons que  $f$  et  $g$  sont deux  $\mathbb{P}$ -frises telles que  $f = g$  sur  $\Sigma$ . L'hypothèse de récurrence est que  $f = g$  sur  $\Sigma(n)$  pour un certain  $n \geq 0$ . Or, pour une maille avec les points  $x$  et  $\tau^{-1}x$  tels que  $\tau^{-1}x$  est adjacent à  $\Sigma(n)$ , on a

$$\begin{aligned} f(\tau^{-1}x) &= f(x)^{-1} \odot \left( \left( \bigodot_{\alpha \in x^+} f(t(\alpha)) \right) \oplus 1 \right) \\ &= g(x)^{-1} \odot \left( \left( \bigodot_{\alpha \in x^+} g(t(\alpha)) \right) \oplus 1 \right) \end{aligned}$$

$$= g(\tau^{-1}x).$$

De la même manière, on a que pour une maille avec les points  $x$  et  $\tau x$  tels que  $\tau x$  est adjacent à  $\Sigma(n)$ ,  $f(\tau x) = g(\tau x)$ . Par conséquent,  $f = g$  sur  $\Sigma(n+1)$  et il s'ensuit que  $f = g$  sur  $\Sigma(\infty)$ . La bijectivité est ainsi prouvée.  $\square$

**Corollaire 2.11.** *Soit  $\mathbb{P}$  un semi-corps non-négatif.*

i) *Soit  $\mathcal{R}_i$  un rayon dans  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ . Alors il existe une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{P}\text{-frise sur } \mathcal{R}_{\geq i}\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{suite d'éléments inversibles de } \mathbb{P}\} \\ f & \longmapsto & (f(i, l))_{l \geq 1} \end{array}$$

ii) *Soit  $\mathcal{R}^i$  un corayon dans  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ . Alors il existe une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{P}\text{-frise sur } \mathcal{R}^{\leq i}\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{suite d'éléments inversibles de } \mathbb{P}\} \\ f & \longmapsto & (f(i+1-l, l))_{l \geq 1} \end{array}$$

iii) *Soit une section en zig-zag  $\mathcal{Z}_i$ . Alors il existe une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{P}\text{-frise sur } \mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{suite d'éléments inversibles de } \mathbb{P}\} \\ f & \longmapsto & (f(j, l))_{(j, l) \in \mathcal{Z}_i} \end{array}$$

*Démonstration.* Les énoncés découlent directement du lemme 2.10.  $\square$

## 2.2 Coefficients de linéarisation et polynômes de Tchebychev

Un résultat connu des frises classiques est que les valeurs de la frise sur une diagonale sont un multiple de la somme de ses valeurs sur les deux diagonales adjacentes [CC73a, CC73b]. On voudra un énoncé semblable dans le cas des frises sur semi-anneaux avec les rayons et les corayons à la place des diagonales.

Commençons par rajouter à  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  les points  $(k, 0)$  pour tout entier  $k$ , placés sous la bouche de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ , et les flèches qui rendent ce carquois connexe.

**Proposition 2.12.** *Soit  $\mathbb{P}$  un semi-corps non-négatif et  $f$  une  $\mathbb{P}$ -frise sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  telle que  $f(k, 0) = 1$  pour tout entier  $k$ . Alors,*

*i) pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , il existe  $n_i \in \mathbb{P}$  tel que pour tout  $l \geq 1$ , on a*

$$n_i \odot f(i, l) = f(i - 1, l + 1) \oplus f(i + 1, l - 1),$$

*et en outre  $n_i = f(i - 1, 1)$ .*

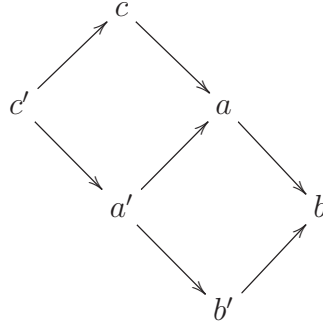
*ii) pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , il existe  $n_i \in \mathbb{P}$  tel que pour tout  $l \geq 1$ , on a*

$$n_i \odot f(i + 1 - l, l) = f(i + 1 - l, l - 1) \oplus f(i + 1 - l, l + 1).$$

*et en outre  $n_i = f(i + 1, 1)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer i), puisque ii) en est le dual. Commençons par montrer l'existence du  $n_i$ .

Soit un rayon sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  et soit les valeurs locales de  $f$  sur celui-ci et ses rayons adjacents.



On a que  $a$  est inversible en vertu des hypothèses sur  $\mathbb{P}$  et  $f$ . Posons  $n = a^{-1} \odot (b \oplus c)$ . On voudra montrer que  $n \odot a' = b' \oplus c'$  et ce sera suffisant pour obtenir l'énoncé. Puisque  $f$  est une frise, on a les deux relations suivantes :

$$a \odot c' = (a' \odot c) \oplus 1 \text{ et } a' \odot b = (a \odot b') \oplus 1$$

et par conséquent on a que

$$a' \odot a \odot n = a' \odot a \odot (a^{-1} \odot (b \oplus c))$$

$$\begin{aligned}
&= a' \odot (b \oplus c) \\
&= (a' \odot b) \oplus (a' \odot c) \\
&= (a \odot b') \oplus 1 \oplus (a' \odot c) \\
&= (a \odot b') \oplus (a \odot c') \\
&= a \odot (b' \oplus c').
\end{aligned}$$

En prémultipliant les deux côtés par  $a^{-1}$ , on obtient  $n \odot a' = b' \oplus c'$ .

Il reste à monter que  $n_i = f(i-1, 1)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  est un carquois à translation stable, il suffit de montrer le résultat pour  $i = 1$ . Rappelons que  $\mathbb{P}$  est un semi-corps non-négatif, ce qui implique que  $f$  sera une frise inversible. Ainsi, pour tout  $l \geq 1$ , il existe  $n_1$  tel que

$$n_1 \odot f(1, l) = f(0, l+1) \oplus f(2, l-1).$$

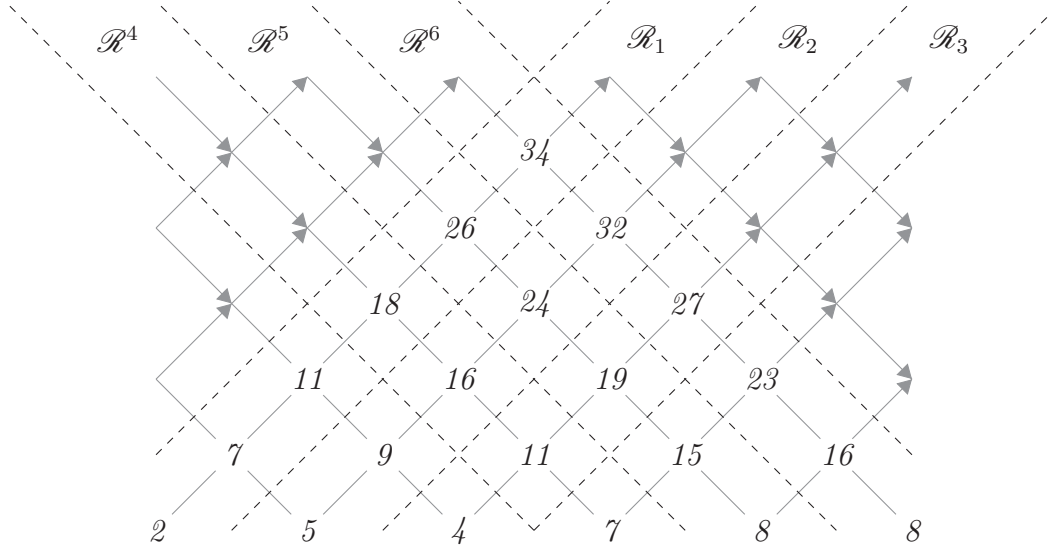
Puisque  $n_i$  ne varie pas le long du  $i^e$  rayon, fixons  $l = 1$ . On obtient

$$\begin{aligned}
n_1 &= f(1, 1)^{-1} \odot (f(0, 2) \oplus f(2, 0)) \\
&= f(1, 1)^{-1} \odot ((f(0, 2) \odot 1) \oplus 1) \\
&= f(1, 1)^{-1} \odot ((f(0, 2) \odot f(1, 0)) \oplus 1) \\
&= f(0, 1)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le résultat. □

**Remarque 2.13.** *Dans la proposition précédente, l'hypothèse de semi-corps non-négatif sert à obtenir une frise sans zéro et inversible, ce qui est suffisant à la preuve. Par conséquent, si  $\mathbb{P}$  est un semi-anneau non-négatif et que  $f$  est inversible, alors le résultat est toujours valide.*

**Exemple 2.14.** *Soit la  $\mathbb{Z}_{trop}$ -frise suivante sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ .*



On a que pour les rayons  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$ ,

$$34 = \max(34, 27) = 32 + 2$$

$$26 = \max(26, 19) = 24 + 2$$

$$18 = \max(18, 11) = 16 + 2$$

$$11 = \max(11, 4) = 9 + 2$$

$$7 = \max(7, 0) = 5 + 2$$

$$2 = \max(2, -\infty) = 0 + 2 = f(0, 1)$$

et donc  $a_2 + 2 = \max(a_1, a_3)$  avec  $a_i \in \mathcal{R}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . De la même manière, on a que  $a_5 + 8 = \max(a_4, a_6)$  avec  $a_i \in \mathcal{R}^i$ ,  $i = 4, 5, 6$ .

Un autre résultat connu des frises classiques concerne les polynômes de Tchebychev, qui dit que chaque valeur de la frise est l'évaluation d'un polynôme de Tchebychev en fonction de certains éléments sur la bouche du carquois [CC73a, CC73b]. Comme pour les coefficients de linéarisation, cela peut être généralisé aux frises de semi-anneaux sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ .



Mais pour cela, il faut d'abord définir un polynôme de Tchebychev sur un semi-anneau et donner quelques résultats sur leurs propriétés avant de les relier aux frises.

**Définition 2.15.**

i) Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau régulier et  $\tilde{\mathbb{P}}$  sa symétrisation. Alors,

$$\tilde{\mathbb{P}}[x_1, \dots, x_n] = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid a_{i_1, \dots, i_n} \in \tilde{\mathbb{P}} \right\}$$

est l'anneau des polynômes à  $n \in \mathbb{N}$  indéterminées et à coefficients dans  $\tilde{\mathbb{P}}$ .

ii) Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau régulier. Pour tout  $l \geq 1$ , le  $l^e$  polynôme de Tchebychev généralisé ou polynôme continuant signé est le polynôme  $P_l \in \tilde{\mathbb{P}}[x_1, \dots, x_n]$  défini récursivement par  $P_0(x) = \overline{(1, 0)}$ ,  $P_1(x_1) = x_1$  et pour tout  $l \geq 1$ ,

$$P_{l+1}(x_1, \dots, x_{l+1}) = x_{l+1} \cdot P_l(x_1, \dots, x_l) - \overline{(1, 0)} \cdot P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}).$$

Afin d'alléger la notation dans cette section, nous écrirons  $\overline{(1, 0)} = 1$  et  $\overline{(0, 0)} = 0$ .

**Lemme 2.16.** Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau régulier. Alors pour tout  $l \geq 1$ ,

$$P_l(x_1, \dots, x_l) = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & x_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x_{l-1} & 1 \\ 0 & & & 1 & x_l \end{pmatrix}$$

avec la matrice dans  $M_l(\tilde{\mathbb{P}}[x_1, \dots, x_l])$ , l'ensemble des matrices carrées  $l \times l$  qui prennent leurs valeurs dans  $\tilde{\mathbb{P}}[x_1, \dots, x_l]$ .

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $l$ . Pour  $l = 1$ , on a que  $P_1(x_1) = x_1 = \det(x_1)$ . Supposons que le résultat est vérifié jusqu'à un  $l \geq 1$  fixé. Montrons qu'il sera vérifié pour  $l + 1$ .

En vertu de la définition des polynômes de Tchebychev, on a que

$$P_{l+1}(x_1, \dots, x_{l+1}) = x_{l+1} \cdot P_l(x_1, \dots, x_l) - P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}).$$

L'hypothèse de récurrence nous dit que

$$P_l(x_1, \dots, x_l) = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & x_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x_{l-1} & 1 \\ 0 & & & 1 & x_l \end{pmatrix}$$

et

$$P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & x_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x_{l-2} & 1 \\ 0 & & & 1 & x_{l-1} \end{pmatrix}.$$

En remplaçant ces valeurs dans l'égalité précédente, on obtient le déterminant, obtenu par le développement par la dernière colonne, de la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & x_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x_{l-1} & 1 \\ & & & 1 & x_l & 1 \\ 0 & & & & 1 & x_{l+1} \end{pmatrix}.$$

Le résultat est valide pour  $l+1$  et par conséquent il l'est aussi pour tout  $l \geq 1$ .  $\square$

**Lemme 2.17.** *Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau régulier. Alors pour tout  $l \geq 2$ , on a*

$$\det \begin{pmatrix} P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}) & P_l(x_1, \dots, x_l) \\ P_{l-2}(x_2, \dots, x_{l-1}) & P_{l-1}(x_2, \dots, x_l) \end{pmatrix} = 1$$

avec la matrice dans  $M_2(\widetilde{\mathbb{P}}[x_1, \dots, x_n])$ .

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $l$  où  $l \geq 2$ . Pour  $l = 2$ , on a

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} P_1(x_1) & P_2(x_1, x_2) \\ P_0 & P_1(x_2) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \cdot x_1 - 1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdot x_2 - (x_2 \cdot x_1 - 1) \\ &= x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_1 + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Supposons que le résultat est valide pour un  $l \geq 2$  fixé. Montrons qu'il est aussi vérifié pour  $l + 1$ . D'abord, posons

$$\Delta_l = \det \begin{pmatrix} P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}) & P_l(x_1, \dots, x_l) \\ P_{l-2}(x_2, \dots, x_{l-1}) & P_{l-1}(x_2, \dots, x_l) \end{pmatrix}.$$

On remarque ensuite que la définition récursive des polynômes de Tchebychev donne l'égalité suivante.

$$P_l(x_2, \dots, x_{l+1}) + P_{l-2}(x_2, \dots, x_{l-1}) = x_{l+1} \cdot P_{l-1}(x_2, \dots, x_l)$$

Montrons que  $\Delta_{l+1} = 1$ , sachant que  $\Delta_l = 1$ .

$$\begin{aligned}
\Delta_{l+1} &= P_l(x_1, \dots, x_l) \cdot P_l(x_2, \dots, x_{l+1}) - P_{l-1}(x_2, \dots, x_l) \cdot P_{l+1}(x_1, \dots, x_{l+1}) \\
&= P_l(x_1, \dots, x_l) \cdot P_l(x_2, \dots, x_{l+1}) \\
&\quad - P_{l-1}(x_2, \dots, x_l) \cdot (x_{l+1} \cdot P_l(x_1, \dots, x_l) - P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1})) \\
&= P_l(x_1, \dots, x_l) \cdot P_l(x_2, \dots, x_{l+1}) + P_{l-1}(x_2, \dots, x_l) \cdot P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}) \\
&\quad - x_{l+1} \cdot P_{l-1}(x_2, \dots, x_l) \cdot P_l(x_1, \dots, x_l) \\
&= P_l(x_1, \dots, x_l) \cdot P_l(x_2, \dots, x_{l+1}) + P_{l-1}(x_2, \dots, x_l) \cdot P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}) \\
&\quad - (P_l(x_2, \dots, x_{l+1}) + P_{l-2}(x_2, \dots, x_{l-1})) \cdot P_l(x_1, \dots, x_l) \\
&= P_l(x_1, \dots, x_l) \cdot P_l(x_2, \dots, x_{l+1}) + P_{l-1}(x_2, \dots, x_l) \cdot P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}) \\
&\quad - P_l(x_2, \dots, x_{l+1}) \cdot P_l(x_1, \dots, x_l) - P_{l-2}(x_2, \dots, x_{l-1}) \cdot P_l(x_1, \dots, x_l) \\
&= P_{l-1}(x_2, \dots, x_l) \cdot P_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}) - P_{l-2}(x_2, \dots, x_{l-1}) \cdot P_l(x_1, \dots, x_l) \\
&= \Delta_l \\
&= 1
\end{aligned}$$

Par conséquent, le résultat est valide pour tout  $l \geq 2$ . □

Les prochains résultats auront comme but de faire le lien entre les polynômes de Tchebychev et les valeurs sur la bouche de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  d'une  $\mathbb{P}$ -frise.

**Proposition 2.18.** *Soit  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite d'éléments non-nuls dans un semi-corps régulier  $\mathbb{P}$ . Alors, il existe au plus une  $\mathbb{P}$ -frise inversible sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  telle que  $f(i, 1) = a_i$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Nous voulons prouver l'unicité d'une frise vérifiant les conditions de l'énoncé. Supposons qu'il existe deux  $\mathbb{P}$ -frises  $f$  et  $g$  sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  telles que  $f(i, 1) = a_i = g(i, 1)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Montrons que ces deux frises sont égales sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ , c'est-à-dire que  $f(i, l) = g(i, l)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $l \geq \mathbb{N}$ .

Puisque  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  est un carquois à transation stable, on peut, sans perte de généralité, fixer  $i$ . Procédons par récurrence sur  $l$ . Par définition,  $f(i, 1) = g(i, 1)$ . Pour  $l = 2$ , utilisons la définition de frise. On a

$$f(i, 2) \oplus 1 = f(i, 1) \odot f(i + 1, 1) = g(i, 1) \odot g(i + 1, 1) = g(i, 2) \oplus 1.$$

En vertu du fait que  $\mathbb{P}$  est régulier, 1 est régulier et par conséquent,  $f(i, 2) = g(i, 2)$ .

Supposons à présent que  $f(i, k) = g(i, k)$  pour tout  $k \leq l$  pour un certain  $l \geq 2$ . Montrons que  $f(i, l + 1) = g(i, l + 1)$ . La relation de frise donne

$$\begin{aligned} (f(i, l + 1) \odot f(i + 1, l - 1)) \oplus 1 &= f(i, l) \odot f(i + 1, l) \\ &= g(i, l) \odot g(i + 1, l) \\ &= (g(i, l + 1) \odot g(i + 1, l - 1)) \oplus 1. \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, 1 est régulier et implique l'égalité

$$f(i, l + 1) \odot f(i + 1, l - 1) = g(i, l + 1) \odot g(i + 1, l - 1).$$

De plus,  $f$  et  $g$  sont inversibles et en vertu de l'hypothèse de récurrence, on obtient que  $f(i + 1, l - 1) = g(i + 1, l - 1) \neq 0$ . Il est donc possible de post-multiplier par  $f(i + 1, l - 1)^{-1}$ , ce qui donne  $f(i, l + 1) = g(i, l + 1)$ .  $\square$

**Définition 2.19.** Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau régulier. Une suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  d'éléments de  $\mathbb{P}$  est dite non annulatrice pour les polynômes de Tchebychev si  $P_l(a_i, \dots, a_{i+l-1}) \neq 0$  pour tous  $i \in \mathbb{Z}$  et  $l \geq 1$ .

Notons que l'existence d'une suite non annulatrice n'est pas triviale, mais qu'elle est prouvée dans le cas des nombres naturels un peu plus loin dans ce mémoire.

**Corollaire 2.20.** *Soit  $\mathbb{P}$  un semi-anneau régulier,  $\tilde{\mathbb{P}}$  sa symétrisation et  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite non annulatrice sur les polynômes de Tchebychev dans  $\mathbb{P}$ . Alors il existe une  $\tilde{\mathbb{P}}$ -frise sans zéro  $f$  sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  telle que  $f(i, 1) = a_i$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  donnée par  $f(i, l) = P_l(a_i, \dots, a_{i+l-1})$  pour tous  $i \in \mathbb{Z}$  et  $l \geq 1$ . En outre, si  $\mathbb{P}$  est un semi-corps, la  $\tilde{\mathbb{P}}$ -frise  $f$  sera unique.*

*Démonstration.* Prouvons d'abord l'existence. Puisque la suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est non annulatrice, on a que  $P_l(a_i, \dots, a_{i+l-1}) \neq 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $l \geq 1$ . Posons

$$\Delta_{i,l} = \det \begin{pmatrix} P_{l-1}(a_i, \dots, a_{i+l-2}) & P_l(a_i, \dots, a_{i+l-1}) \\ P_{l-2}(a_{i+1}, \dots, a_{i+l-2}) & P_{l-1}(a_{i+1}, \dots, a_{i+l-1}) \end{pmatrix}.$$

En vertu du lemme 2.17,  $\Delta_{i,l} = 1$  et ainsi,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{P}} \\ (i, l) &\longmapsto P_l(a_i, \dots, a_{i+l-1}) \end{aligned}$$

est une  $\tilde{\mathbb{P}}$ -frise sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  sans zéro. De plus,  $f(i, 1) = P_1(a_i) = a_i$ , ce qui complète la preuve de l'existence.

La proposition 2.18 donne l'unicité. □

## 2.3 Frises tropicales

Rappelons que les entiers tropicaux forment un semi-corps non régulier, non-négatif et intègre. Ainsi, les résultats de la section précédente ne peuvent pas être appliqués. Par contre,  $\mathbb{N}$  est régulier. Nous utiliserons cette propriété afin d'obtenir des résultats similaires à la section précédente, mais dans le cadre des  $\mathbb{N}$ -frises et des  $\mathbb{Z}_{trop}$ -frises.

Le lemme suivant est analogue au corollaire 2.2 de [BPT15] qui s'intéresse aux frises sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ .

**Lemme 2.21.** Soit  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite dans  $\mathbb{N}$  telle que  $a_i \geq 2$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Alors, l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (i, l) &\longmapsto P_l(a_i, \dots, a_{i+l-1}) \end{aligned}$$

est une  $\mathbb{Z}$ -frise et les valeurs de  $\phi$  sur chaque rayon sont strictement croissantes.

*Démonstration.* En vertu du lemme 2.17,

$$\Delta_{i,l} = \det \begin{pmatrix} P_{l-1}(a_i, \dots, a_{i+l-2}) & P_l(a_i, \dots, a_{i+l-1}) \\ P_{l-2}(a_{i+1}, \dots, a_{i+l-2}) & P_{l-1}(a_{i+1}, \dots, a_{i+l-1}) \end{pmatrix} = 1.$$

Il en résulte que  $\phi$  vérifie la relation de frise. Il reste à montrer que les valeurs de la frise sur chaque rayon sont strictement croissantes.

Procédons par récurrence sur  $l$  dans  $(\phi(i, l))_{l \geq 1}$ . Pour  $l = 2$ , l'hypothèse de départ donne  $\phi(i, 1) \geq 2$  ce qui donne, en vertu de la définition de  $\mathbb{Z}$ -frise,

$$\begin{aligned} \phi(i, 2) &= \phi(i+1, 1) \phi(i, 1) - 1 \\ &\geq 2\phi(i, 1) - 1 \\ &\geq \phi(i, 1) - 1 \\ &> \phi(i, 1). \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe un  $l \geq 2$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < \phi(i, j) < \phi(i, k)$  quand  $j < k \leq l$ . Montrons que  $\phi(i, l+1) > \phi(i, l)$ . La définition de  $\mathbb{Z}$ -frise donne

$$\phi(i, l) \phi(i+1, l) = \phi(i, l+1) \phi(i+1, l-1) + 1.$$

Ainsi,

$$\phi(i, l+1) = \frac{\phi(i, l) \phi(i+1, l) - 1}{\phi(i+1, l-1)} = \frac{\phi(i, l) \phi(i+1, l)}{\phi(i+1, l-1)} - \frac{1}{\phi(i+1, l-1)}.$$

Regardons les différentes parties du terme de droite. En vertu de l'hypothèse de récurrence,  $\phi(i+1, l) > \phi(i+1, l-1)$ , d'où

$$\frac{\phi(i+1, l)}{\phi(i+1, l-1)} \geq \frac{1 + \phi(i+1, l-1)}{\phi(i+1, l-1)} = 1 + \frac{1}{\phi(i+1, l-1)}.$$

On constate aussi que  $\phi(i+1, l-1) \geq 2$ , ce qui donne  $\frac{1}{\phi(i+1, l-1)} < 1$ . De plus,  $\phi(i, l) \geq 2$ .

Ces informations permettent d'obtenir les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned}
\phi(i, l+1) &= \frac{\phi(i, l) \phi(i+1, l)}{\phi(i+1, l-1)} - \frac{1}{\phi(i+1, l-1)} \\
&\geq \phi(i, l) \left( 1 + \frac{1}{\phi(i+1, l-1)} \right) - \frac{1}{\phi(i+1, l-1)} \\
&= \phi(i, l) + \frac{\phi(i, l)}{\phi(i+1, l-1)} - \frac{1}{\phi(i+1, l-1)} \\
&\geq \phi(i, l) + \frac{2}{\phi(i+1, l-1)} - \frac{1}{\phi(i+1, l-1)} \\
&= \phi(i, l) + \frac{1}{\phi(i+1, l-1)} \\
&> \phi(i, l)
\end{aligned}$$

Cela prouve que les valeurs de  $\phi$  augmentent sur les rayons. □

**Remarque 2.22.** *La preuve précédente montre que les valeurs de la frise  $\phi$  sont strictement croissantes sur le rayon  $\mathcal{R}_i$ . Il existe un énoncé dual disant que  $\phi$  est strictement croissante sur le corayon  $\mathcal{R}^i$ . Il découle de ces deux résultats que la section en zig-zag  $\mathcal{Z}_i$  est aussi strictement croissante, puisqu'elle alterne entre rayons et corayons.*

**Corollaire 2.23.** *Soit  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite dans  $\mathbb{N}$  telle que  $a_i \geq 2$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Alors, il existe une unique  $\mathbb{N}$ -frise  $f$  sans zéro sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  telle que  $f(i, 1) = a_i$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .*

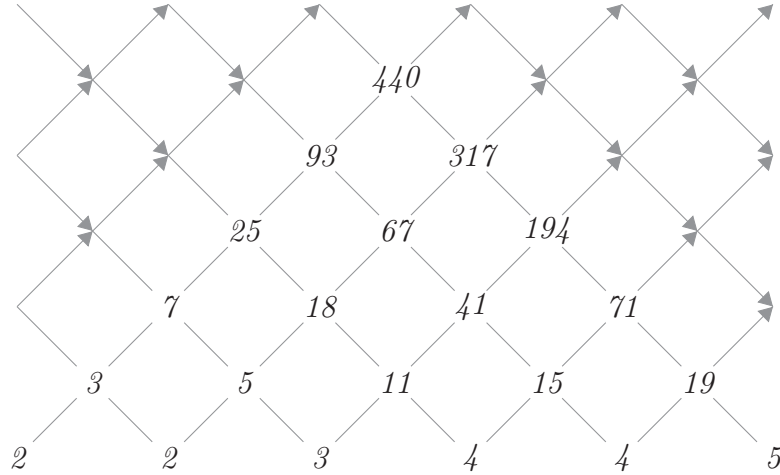
*Démonstration.* Montrons d'abord l'existence de la frise. Puisque  $\mathbb{N}$  est régulier,  $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}$  comme prouvé dans l'exemple 1.13. Posons  $\phi(i, l) = P_l(a_i, \dots, a_{i+l-1}) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $l \geq 1$ . En vertu du lemme 2.21, c'est une  $\mathbb{Z}$ -frise qui est strictement croissante sur ses rayons. Il reste à montrer que  $\phi$  est sans zéro en tant que  $\mathbb{N}$ -frise, c'est-à-dire que  $\phi(i, l) > 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $l \geq 1$ .



La croissance stricte sur les rayons donne  $\phi(i, l) > \phi(i, 1) = a_i \geq 2$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $l \geq 1$ , ce qui prouve que  $\phi$  est une  $\mathbb{N}$ -frise sans zéro sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ .

Pour l'unicité, considérons  $\phi$  en tant que  $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ -frise. Or,  $\mathbb{Q}_{\geq 0}$  est un semi-corps régulier. En vertu du corollaire 2.20, il s'ensuit que  $\phi$  est unique.  $\square$

**Exemple 2.24.** La  $\mathbb{N}$ -frise obtenue avec la suite  $(\dots, 2, 2, 3, 4, 4, 5, \dots)$  placée sur la bouche de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  est la suivante.



Les résultats suivants sont en fait très similaires au précédent, mais dans le cas des frises tropicales.

**Lemme 2.25.** Soit  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite dans  $\mathbb{Z}$  telle que  $a_i \geq 1$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et  $f$  une  $\mathbb{Z}_{\text{trop}}$ -frise sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ . Alors,  $f$  est strictement croissante sur chaque rayon  $\mathcal{R}_i$ .

*Démonstration.* Procédons par récurrence. Pour  $l = 2$ , la définition de  $f$  et  $a_i \geq 1$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  donnent

$$f(i, 2) = f(i, 1) + f(i + 1, 1) \geq f(i, 1) + 1 > f(i, 1).$$

Supposons que  $l \geq 2$  est tel que l'énoncé est vérifié pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $k < l$ . La définition de  $f$  et l'hypothèse de récurrence impliquent

$$f(i, l+1) - f(i, l) = f(i+1, l) - f(i+1, l-1) > 0,$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**Corollaire 2.26.** *Soit  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite dans  $\mathbb{Z}$  telle que  $a_i \geq 1$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Alors il existe une unique  $\mathbb{Z}_{trop}$ -frise  $f$  sans zéro sur  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  telle que  $f(i, 1) = a_i$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Nous voulons construire la frise  $f$  par récurrence sur  $l \geq 1$ . Pour ce faire, posons

$$\begin{aligned} f(i, 2) &= f(i, 1) + f(i+1, 1) \\ f(i, l+1) &= f(i, l) + f(i+1, l) - f(i+1, l-1) \end{aligned}$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $l \geq 1$ . Montrons que cette fonction est une  $\mathbb{Z}_{trop}$ -frise sans zéro. En vertu de la définition de  $f$ , il est clair que  $f(i, l) \neq -\infty$  et donc que si  $f$  est une frise, elle sera sans zéro.

Il reste donc à montrer que  $f(i, l) + f(i+1, l) = \max(f(i, l+1) + f(i+1, l-1), 0)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $l \geq 1$ , ce qui est le cas si  $f(i, l+1) + f(i+1, l-1) \geq 0$ .

Or, en vertu du lemme 2.25,  $f(i, l) \geq 1$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $l \geq 1$ . Donc,

$$f(i, l+1) + f(i+1, l-1) \geq 1 + 1 = 2 \geq 0.$$

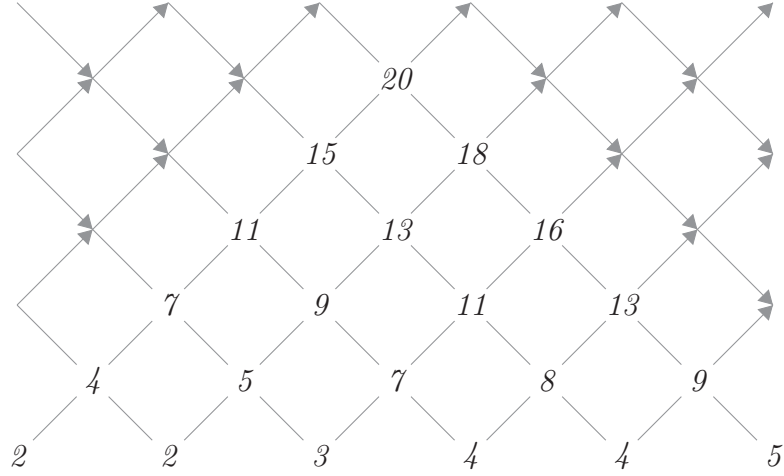
En vertu de la définition de  $f$ , une telle frise sans zéro est unique.  $\square$

**Remarque 2.27.**

- a) *Comme pour le lemme 2.21, la preuve par récurrence peut se faire sur les corayons et implique que les valeurs de  $f$  sont strictement croissantes sur tous les  $\mathcal{R}_i, \mathcal{R}^i$  et  $\mathcal{L}_i$ .*

b) Les valeurs minimales sur la bouche de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  dans les résultats précédents sont choisies de sorte que l'énoncé de croissance stricte soit respecté.

**Exemple 2.28.** La  $\mathbb{Z}_{\text{trop}}$ -frise obtenue avec la suite  $(\dots, 2, 2, 3, 4, 4, 5 \dots)$  placée sur la bouche de  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$  est la suivante.



# CHAPITRE 3

## Frises tropicales sur le carquois d'Auslander-Reiten d'une catégorie

Ce dernier chapitre s'intéresse aux frises tropicales sur des carquois particuliers, les carquois d'Auslander-Reiten de catégories, soit  $k$ -abéliennes, soit amassées. L'objectif est d'expliciter le lien entre ces frises et un objet algébrique bien connu, le vecteur dimension associé aux objets indécomposables de la catégorie. Pour tout ce qui a trait à la théorie des catégories, à la théorie des représentations des carquois et à la théorie d'Auslander-Reiten, nous référons le lecteur à [ASS06, ARS95, Sch13].

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie additive de Krull-Schmidt avec des suites ou des triangles presque scindés. Rappelons que son *carquois d'Auslander-Reiten*, noté  $\Gamma(\mathcal{C})$ , est un carquois dont les points sont les classes d'isomorphismes d'objets indécomposables de  $\mathcal{C}$  et les flèches entre deux objets sont en bijection avec une base de l'espace vectoriel des morphismes irréductibles d'un objet vers l'autre. De plus, il existe la translation  $\tau$  où pour tout objet

indécomposable  $M$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $\tau M$  existe, il y a une suite presque scindée

$$0 \rightarrow \tau M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^p B_i \rightarrow M \rightarrow 0,$$

ou un triangle presque scindé

$$\tau M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^p B_i \rightarrow M \rightarrow \tau M[1]$$

où les  $B_i$  sont indécomposables pour tout  $1 \leq i \leq p$ . Cette suite, ou ce triangle, se retrouve dans  $\Gamma(\mathcal{C})$  sous la forme de maille.

### 3.1 Catégories $k$ -abéliennes

Nous rappelons la définition de catégorie  $k$ -abélienne.

**Définition 3.1.** *Soit  $k$  un corps. Une catégorie  $\mathcal{A}$  est dite  $k$ -abélienne si les conditions suivantes sont vérifiées.*

- i)  $\mathcal{A}$  est munie d'un objet zéro, noté 0,
- ii)  $\mathcal{A}$  est munie d'un biproduct  $\oplus$  pour toute paire d'objets,
- iii) Pour toute paire d'objets  $X, Y$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  est un  $k$ -espace vectoriel,
- iv) La composition  $\circ$  est une application  $k$ -bilinéaire,
- v) Tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{A}$  admet un noyau  $u : \text{Ker} f \rightarrow X$  et un conoyau  $p : Y \rightarrow \text{Coker} f$ . De plus, le morphisme induit,  $\bar{f} : \text{Coker} u \rightarrow \text{Ker} p$  est un isomorphisme.

Les conditions i) à iv) forment une catégorie  $k$ -additive. Tout au long de cette section, supposons que  $\mathcal{A}$  est une catégorie  $k$ -abélienne de Krull-Schmidt avec des suites presque scindées. Notons  $\Gamma(\mathcal{A})$  le carquois d'Auslander-Reiten de cette catégorie. Un résultat

bien connu est que toute catégorie  $k$ -abélienne est contenue dans une catégorie de modules [Mit65]. C'est pourquoi nous allons nous intéresser au cas des modules avant de revenir à un cadre plus général. Les deux définitions et le théorème qui suivent proviennent de [ASS06].

Ainsi, supposons que  $k$  est un corps algébriquement clos,  $A$  une  $k$ -algèbre élémentaire et connexe telle que  $A = kQ/I$  est une algèbre de carquois lié. Ici,  $Q$  est un carquois fini et connexe et  $I$  un idéal admissible de l'algèbre de chemins  $kQ$ . Soit  $\{1, \dots, n\}$  l'ensemble des points de  $Q$  et  $(e_i)_{i \in Q_0}$  des idempotents primitifs orthogonaux de  $A$  tels que  $e_j$  est associé au point  $j$ . Supposons enfin que  $\mathcal{A} = \text{mod}A$  où  $\text{mod}A$  est la catégorie des  $A$ -modules à droite de dimension finie.

Nous pouvons maintenant donner la définition de vecteur dimension.

**Définition 3.2.** Soit  $A = kQ/I$  telle que définie plus haut,  $n = |Q_0|$  et  $M$  un module dans  $\text{mod}A$ . Alors le vecteur dimension de  $M$  est le vecteur

$$\mathbf{dim} M = (\dim_k M e_i)_{i \in Q_0}$$

qui est dans  $\mathbb{Z}^n$ .

On remarque que les vecteurs dimension des modules simples forment la base canonique de  $\mathbb{Z}^n$ .

**Définition 3.3.** Soit  $A = kQ/I$  telle que définie plus haut et  $n = |Q_0|$ . Le groupe de Grothendieck de  $\text{mod}A$  est le groupe abélien  $K_0(\text{mod}A) = F/F'$  où  $F$  est le groupe abélien libre dont la base est formée de l'ensemble des classes d'isomorphismes  $\tilde{M}$  des objets  $M$  dans  $A$  et  $F'$  est le sous-groupe de  $F$  engendré par les éléments  $\tilde{M} - \tilde{L} - \tilde{N}$  correspondant à toutes les suites exactes courtes  $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ . L'image de  $\tilde{M}$  par l'épimorphisme canonique  $F \rightarrow F/F'$  est notée  $[M]$ .

Le théorème suivant fait le lien entre le groupe de Grothendieck et les vecteurs dimension.

**Théorème 3.4.** *Soit  $A = kQ/I$  une  $k$ -algèbre élémentaire de dimension finie,  $n = |Q_0|$  et  $S_1, \dots, S_n$  un ensemble complet des classes d'isomorphismes des  $A$ -modules simples. Alors,  $K_0(\text{mod}A)$  est un groupe abélien libre de base  $\{[S_1], \dots, [S_n]\}$  et il existe un isomorphisme de groupes  $\mathbf{dim} : K_0(\text{mod}A) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$  tel que  $\mathbf{dim} [M] = \mathbf{dim} M$  pour tout  $A$ -module  $M$ .*

Il découle donc de ce théorème que  $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}^n$  et que les éléments du groupe de Grothendieck sont en fait les vecteurs dimension des objets de la catégorie  $k$ -abélienne  $\mathcal{A}$ . C'est pourquoi nous ne ferons pas de distinction entre  $[M]$  et  $\mathbf{dim} M$ .

D'un point de vue plus général, soit  $\mathcal{A}$  une catégorie  $k$ -abélienne et  $(S_i)_{i \in I}$  l'ensemble des ses objets simples non-isomorphes. On définit son groupe de Grothendieck  $K_0(\mathcal{A})$  de la même manière que dans la définition 3.3. De plus, il est connu que  $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}^I$  et que  $\mathbf{dim} M$  correspond au vecteur des multiplicités des objets simples qui constituent l'objet  $M$ .

**Définition 3.5.** *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie  $k$ -abélienne,  $(S_i)_{i \in I}$  ses objets simples et  $K_0(\mathcal{A})$  son groupe de Grothendieck isomorphe à  $\mathbb{Z}^I$ . Le semi-anneau tropical de Grothendieck de  $\mathcal{A}$ , noté  $K_0(\mathcal{A})_{trop}$ , est le le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{trop}^I = (\mathbb{Z}_{trop})^I$ .*

Notons que le maximum de deux vecteurs sera le vecteur des maximums, composante à composante.

**Proposition 3.6.** *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie  $k$ -abélienne avec des suites presque scindées,  $\Gamma(\mathcal{A})$  son carquois d'Auslander-Reiten et  $K_0(\mathcal{A})$  son groupe de Grothendieck. L'application*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob } \mathcal{A} & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}) \\ M & \longmapsto & [M] \end{array}$$

*induit une  $K_0(\mathcal{A})_{trop}$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{A})$ .*

*Démonstration.* Pour prouver que  $M \mapsto [M]$  induit une  $K_0(\mathcal{A})_{trop}$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{A})$ , il faut montrer que la relation de frise est satisfaite. Cela équivaut à montrer que pour toute suite presque scindée de la forme

$$0 \rightarrow \tau M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^p B_i \rightarrow M \rightarrow 0$$

où  $B_i$  est indécomposable pour tout  $1 \leq i \leq p$ , la relation

$$[M] + [\tau M] = \max \left( \sum_{i=1}^p [B_i], [0] \right)$$

est vérifiée. En vertu de la définition du vecteur dimension et de l'isomorphisme  $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}^I$ , pour tout objet non nul  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ , son vecteur dimension  $[X]$  ne prend que des valeurs non-négatives. Il en résulte que

$$\max \left( \sum_{i=1}^p [B_i], [0] \right) = \sum_{i=1}^p [B_i].$$

Enfin, la définition de  $K_0(\mathcal{A})$  implique

$$\sum_{i=1}^p [B_i] - [M] - [\tau M] = [0]$$

et par conséquent,

$$[M] + [\tau M] = \sum_{i=1}^p [B_i] = \max \left( \sum_{i=1}^p [B_i], [0] \right).$$

Ainsi, la relation de frise est vérifiée. □

**Exemple 3.7.** Soit  $Q$  un carquois fini,  $n = |Q_0|$  et  $k$  un corps tel que  $\mathcal{C} = \text{rep}(Q)$  est la catégorie des représentations de dimension finie de  $Q$  sur  $k$ . Soit  $M$  une représentation de  $Q$  telle qu'il existe des sous-représentations  $M^0, M^1, \dots, M^m$  de  $M$  telles que

$$0 = M^0 \subseteq M^1 \subseteq \dots \subseteq M^m = M$$

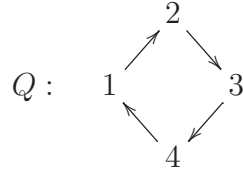


et  $M^i/M^{i-1} \cong S(x)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Notons que  $S(x)$  est la représentation simple associée au point  $x$ . On dit que  $M$  est nilpotente. Prenons  $\mathcal{A} = \text{nil}(Q)$  la catégorie des représentations nilpotentes de dimension finie de  $Q$  sur  $k$ . C'est une catégorie  $k$ -abélienne. Remarquons que dans cette catégorie, même dans le cas d'un carquois avec un cycle, le nombre des objets simples est fini et égal à  $n$ , voir [Rin12]. Si  $Q$  est acyclique,  $\text{nil}(Q) = \text{rep}(Q)$ . Soit  $M$  une représentation appartenant à  $\mathcal{A}$ . Posons  $M(i)$  le  $k$ -espace vectoriel associé au point  $i \in Q_0$ . Alors,

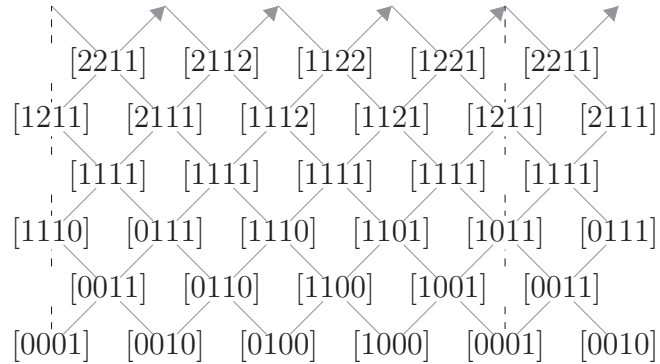
$$\mathbf{dim} M = (\dim_k M(i))_{i \in Q_0}$$

est le vecteur dimension et la proposition 3.6 indique que l'application  $M \mapsto \mathbf{dim} M$  induit une  $\mathbb{Z}_{trop}^n$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{A})$ .

En effet, prenons le carquois suivant.



Les objets simples de  $\mathcal{A} = \text{nil}(Q)$  sont les représentations simples associées à chaque point de  $Q$ . De plus,  $Q$  possède un cycle. Il en découle que  $\Gamma(\mathcal{A})$  est un tube stable de rang 4, et voici la frise tropicale obtenue avec les vecteurs dimension.



## 3.2 Catégories amassées

Les catégories amassées associées à un carquois acyclique  $Q$ , notées  $\mathcal{C}_Q$ , ont été introduites par Buan, Marsh, Reiten, Reineke et Todorov dans [BMR<sup>+</sup>06]. Dans cet article, il est prouvé que  $\mathcal{C}_Q$  est directement liée aux algèbres amassées  $\mathcal{A}(Q)$ , introduites par Fomin et Zelevinsky [FZ03]. Il est aussi démontré que les catégories amassées sont triangulées [Kel05], 2-Calabi-Yau avec le foncteur de suspension  $[1]$  et admettent des objets dits inclinants-amassés.

Un autre résultat, sur le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C}_Q)$  de  $\mathcal{C}_Q$ , est qu'une frise d'anneau sur celui-ci permet de calculer les variables amassées associées à l'algèbre amassée de carquois  $Q$  dans le cas où  $Q$  est euclidien, voir [AD11]. De plus, notons que le foncteur  $[1]$  accomplit la même translation que  $\tau$  sur  $\Gamma(\mathcal{C}_Q)$  et ainsi,  $[n] = \tau^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  dans  $\Gamma(\mathcal{C}_Q)$ .

**Définition 3.8.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathcal{C}_Q$  la catégorie amassée associée à  $Q$ . Un objet  $M \in \text{Ob } \mathcal{C}_Q$  est dit transjectif s'il existe un objet projectif  $P$  dans  $\text{mod } kQ$  et un  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $M = P[n]$ .*

La sous-catégorie pleine  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{C}_Q$  a pour objets les objets tranjectifs de  $\mathcal{C}_Q$ .

La définition de  $\mathcal{T}$  indique que  $\Gamma(\mathcal{T})$ , appelée *composante transjective* de  $\Gamma(\mathcal{C}_Q)$ , est une composante connexe de  $\Gamma(\mathcal{C}_Q)$ , dont la forme dépend de  $Q$ . Si  $Q$  est de type Dynkin [ASS06], alors  $\mathcal{C}_Q = \mathcal{T}$  et  $\Gamma(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}Q/G$  où  $G$  est un groupe d'automorphisme cyclique. Cela est en fait soit un cylindre, soit un ruban de Möbius. Si  $Q$  n'est pas de type Dynkin,  $\Gamma(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}Q$ , voir [ASS06].

La définition suivante est une généralisation de celle de caractère tropical donnée par Guo dans [Guo12] et de celle de caractère amassé [Pal08].

**Définition 3.9.** *Soit  $\mathbb{P}$  un semi-corps non-négatif. Un  $\mathbb{P}$ -caractère sur  $\mathcal{C}_Q$  est une appli-*

cation non nulle  $f : \text{Ob } \mathcal{C}_Q \longrightarrow \mathbb{P}$  telle que

i) Si  $M \cong N$ , alors  $f(M) = f(N)$ ,

ii)  $f(M \oplus N) = f(M) \odot f(N)$ ,

iii)  $f(M) \odot f(N) = f(E) \oplus f(E')$  quand  $M, N$  sont des objets de  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N) \cong k$  et où  $E$  et  $E'$  sont les termes médians des triangles non-scindés suivants.

$$M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow M[1], \quad N \longrightarrow E' \longrightarrow M \longrightarrow N[1]$$

Un  $\mathbb{P}$ -caractère sur  $\mathcal{T}$  est la restriction sur  $\mathcal{T}$  du  $\mathbb{P}$ -caractère sur  $\mathcal{C}_Q$ .

Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amassée et  $M \in \text{Ob } \mathcal{C}_Q$ . Alors,  $\text{add } M$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}_Q$  engendrée par les sommes directes finies des facteurs directs de  $M$ . Voici la définition des objets inclinants-amassés, avant le premier résultat sur les  $\mathbb{P}$ -caractères.

**Définition 3.10.** Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amassée et  $[1]$  le foncteur de suspension. Un objet  $T$  de  $\mathcal{C}_Q$  est dit *inclinant-amassé* si les conditions suivantes sont satisfaites.

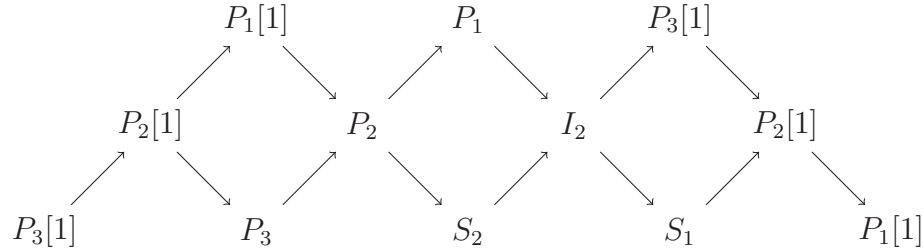
- a)  $T$  est élémentaire, c'est-à-dire que  $T_i \not\cong T_j$  pour tous  $i \neq j$  où  $T_i, T_j$  sont des facteurs directs indécomposables de  $T$ .
- b)  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X[1]) = 0$  si et seulement si  $X \in \text{Ob } \text{add } T$ .

Nous dirons qu'un objet est *rigide* s'il satisfait à la condition a) et à  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T[1]) = 0$ . De plus, un objet inclinant-amassé dont tous les facteurs directs indécomposables sont dans  $\mathcal{T}$  est dit *inclinant-amassé tranjectif*. Pour plus de détails sur la théorie de l'inclinaison, nous référons le lecteur à [ASS06].

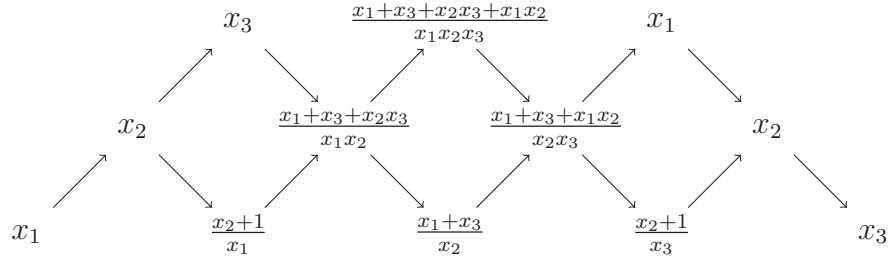
**Remarque 3.11.** Si  $\mathbb{P}$  est un anneau commutatif, alors un  $\mathbb{P}$ -caractère  $f : \text{Ob } \mathcal{C}_Q \longrightarrow \mathbb{P}$  est un caractère amassé dans le sens de Palu [Pal08]. Regardons un cas particulier. Soit  $n = |Q_0|$  et posons  $\mathbb{P} = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  le corps des fonctions rationnelles avec  $n$  indéterminées. Soit aussi  $T$  un objet inclinant-amassé. L'application  $X_T^T : \text{Ob } \mathcal{C}_Q \longrightarrow \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$

telle que  $X_{T_i[1]}^T = x_i$  est un caractère amassé, connu sous le nom de fonction de Caldero-Chapoton.

**Exemple 3.12.** Soit  $Q : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ . Posons  $P_i, I_j$  et  $S_k$  où  $i, j, k \in Q_0$  comme étant respectivement les modules projectifs, injectifs et simples dans  $\text{mod} kQ$ , voir [ASS06]. Le carquois d'Auslander-Reiten associé à  $Q$  est le suivant.



Posons  $T = P_3 \oplus P_2 \oplus P_1$  et posons  $X_{\tau}^T$  le caractère amassé tel que  $X_{T_i[1]}^T = x_i$ . Alors, voici les valeurs de  $X_{\tau}^T$  sur  $\mathcal{C}_Q$ .



**Théorème 3.13.** Soit  $\mathbb{P}$  un semi-corps non-négatif,  $Q$  un carquois acyclique et  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amassée. Alors, on a la bijection

$$\begin{array}{ccc} \{ \mathbb{P}\text{-caractères sur } \mathcal{T} \} & \xrightarrow{\sim} & \{ \mathbb{P}\text{-frises sur } \Gamma(\mathcal{T}) \} \\ f & \longmapsto & f \end{array}$$

*Démonstration.* Soit  $f$  un  $\mathbb{P}$ -caractère sur  $\mathcal{T}$  et  $M$  un objet indécomposable de  $\mathcal{C}_Q$ . Montrons que  $f$  est une  $\mathbb{P}$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ . Puisque  $\mathcal{C}_Q$  est 2-Calabi-Yau, nous avons

$$\dim_k \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, M[1]) = \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(M, M[2]) = \dim D\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(M, M) = 1,$$

$$\dim_k \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M[1], M) = \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(M[1], M[1]) = 1.$$

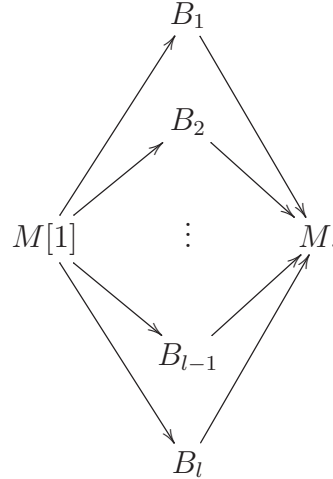
Ainsi, il existe les triangles suivants.

$$M[1] \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l B_i \rightarrow M \rightarrow M[2] \text{ et } M \rightarrow 0 \rightarrow M[1] \rightarrow M[1]$$

Le premier est presque scindé [BMR<sup>+</sup>06]. De plus, selon la définition de  $\mathbb{P}$ -caractère,

$$f(M[1]) \odot f(M) = \bigodot_{i=1}^l f(B_i) \oplus 1.$$

Or, dans  $\Gamma(\mathcal{T})$ ,  $[1] = \tau$ . Par conséquent, il existe dans  $\Gamma(\mathcal{T})$  une maille de la forme



Ainsi,  $f$  est une  $\mathbb{P}$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ .

Maintenant, soit  $f$  une  $\mathbb{P}$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ . Soit  $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$  un objet inclinant-amassé transjectif dont les facteurs directs induisent une section  $\{t_1, \dots, t_n\}$  sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ . Considérons le caractère amassé

$$\begin{array}{ccc} X_{\tau}^T : \text{Ob } \mathcal{C}_Q & \longrightarrow & \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n) \\ N & \longmapsto & X_N^T \end{array}$$

où  $X_{T_i[1]}^T = x_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Enfin, soit  $M$  un objet indécomposable transjectif dans  $\mathcal{C}_Q$ . On a que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(M, M[1]) = 0$ , donc  $M$  est rigide. Un résultat de [Pal08] implique que  $X_M^T$  est une variable amassée dans l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  et  $X_M^T \in \mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n)$ . De plus, [Pal08] indique aussi que  $X_{\tau}^T$  induit une  $\mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n)$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ .

Soit

$$\begin{aligned} \epsilon_f : \mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n) &\longrightarrow \mathbb{P} \\ x_i &\longmapsto f(\tau t_i) \end{aligned}$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ . C'est un morphisme de semi-corps. En vertu du lemme 1.28, la composition  $\epsilon_f \circ X_{\tau}^T$  induit une  $\mathbb{P}$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ .

On prétend que  $\epsilon_f \circ X_{\tau}^T = f$  sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ . En effet,

$$\epsilon_f \circ X_{\tau}^T(T_i[1]) = \epsilon_f(X_{T_i[1]}^T) = \epsilon_f(x_i) = f(\tau t_i)$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Comme  $\epsilon_f \circ X_{\tau}^T = f$  sur la section  $\tau t_1, \dots, \tau t_n$ , le lemme 1.27 implique  $\epsilon_f \circ X_{\tau}^T = f$  sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ . Il reste à montrer que  $f$  satisfait aux conditions d'un  $\mathbb{P}$ -caractère.

Soit  $M, N \in \text{Ob } \mathcal{T}$ . Supposons d'abord que  $M \cong N$ . Alors,

$$f(M) = \epsilon_f(X_M^T) = \epsilon_f(X_N^T) = f(N).$$

Supposons maintenant que  $M$  et  $N$  sont quelconques. On a

$$\begin{aligned} f(M \oplus N) &= \epsilon_f(X_{M \oplus N}^T) \\ &= \epsilon_f(X_M^T \cdot X_N^T) \\ &= \epsilon_f(X_M^T) \odot \epsilon_f(X_N^T) \\ &= f(M) \odot f(N). \end{aligned}$$

Enfin, supposons que  $M$  et  $N$  sont tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, N) \cong k$  et  $E, E' \in \text{Ob } \mathcal{T}$  sont tels que nous avons les triangles non-scindés

$$M \rightarrow E \rightarrow N \rightarrow M[1] \text{ et } N \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow N[1].$$

Nous avons que

$$\begin{aligned}
f(M) \odot f(N) &= \epsilon_f(X_M^T \cdot X_N^T) \\
&= \epsilon_f(X_E^T + X_{E'}^T) \\
&= \epsilon_f(X_E^T) \oplus \epsilon_f(X_{E'}^T) \\
&= f(E) \oplus f(E').
\end{aligned}$$

Les conditions sont vérifiées et  $f$  est un  $\mathbb{P}$ -caractère. □

**Définition 3.14.** *Un ensemble inclinant-amassé dans  $\mathbb{Z}Q$  est une copie dans ce dernier des points qui correspondent aux facteurs directs indécomposables d'un objet inclinant-amassé transjectif de  $\mathcal{C}_Q$ .*

**Remarque 3.15.** *Si  $Q$  est de type Dynkin, tout ensemble inclinant-amassé est infini et correspond aux orbites des  $|Q_0|$  facteurs directs indécomposables dans un domaine fondamental. Si  $Q$  n'est pas de type Dynkin, on aura un ensemble inclinant-amassé avec  $|Q_0|$  éléments.*

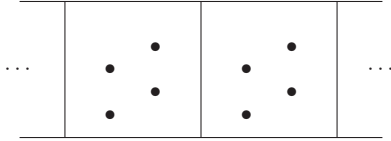


Figure 3.1 – Ensemble inclinant-amassé dans le cas Dynkin.

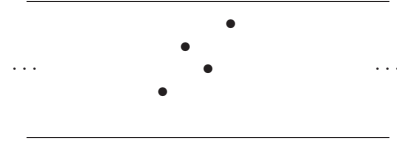


Figure 3.2 – Ensemble inclinant-amassé dans le cas non Dynkin.

La proposition suivante provient de [Guo12] et s'intéresse au cas Dynkin.

**Proposition 3.16.** *Soit  $Q$  un carquois de type Dynkin,  $\mathbb{P}$  un semi-corps non-négatif,  $\mathcal{C}_Q$  la catégorie amassée associée à  $Q$  et  $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_n$  un objet inclinant-amassé de  $\mathcal{C}_Q$ . Alors, l'application*

$$\begin{aligned}
\Phi_T : \{ \mathbb{P}\text{-frises sur } \mathcal{C}_Q \} &\longrightarrow (\mathbb{P} \setminus \{0\})^n \\
f &\longmapsto (f(T_1), \dots, f(T_n))
\end{aligned}$$

*est une bijection.*

*Démonstration.* [Guo12] □

Considérons maintenant le cas non Dynkin.

**Lemme 3.17.** *Soit  $\mathbb{P}$  un semi-corps non-négatif et  $Q$  un carquois fini, acyclique et non Dynkin d'ensemble inclinant-amassé  $\{t_i \mid i \in Q_0\}$ . Alors, il existe une surjection*

$$\begin{aligned} \{\mathbb{P}\text{-frise sur } \mathbb{Z}Q\} &\twoheadrightarrow (\mathbb{P} \setminus \{0\})^{|Q_0|} \\ f &\longmapsto (f(t_i) \mid i \in Q_0) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{P} \setminus \{0\})^{|Q_0|}$  et  $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$  l'objet inclinant-amassé dans  $\mathcal{C}_Q$  associé à  $\{t_i \mid i \in Q_0\}$ . Considérons aussi le caractère amassé  $X_{\mathcal{T}}^T$  défini dans la preuve du théorème 3.13 qui induit une  $\mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n)$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ . Enfin, posons

$$\begin{aligned} \epsilon : \mathbb{Q}_{sf}(x_1, \dots, x_n) &\longrightarrow \mathbb{P} \\ x_i &\longmapsto a_i \end{aligned}$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Le lemme 1.28 implique  $\epsilon \circ X_{\mathcal{T}}^T$  est une  $\mathbb{P}$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}Q$ . Par conséquent, l'application de l'énoncé est une surjection. □

Avant de procéder avec le théorème principal de cette section et de ce mémoire, voici deux définitions et deux résultats provenant de [BMR07] qui seront nécessaires à sa preuve.

**Définition 3.18.** *Soit  $Q$  un carquois fini, connexe et acyclique et  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amassée. Nous appelons paire d'échange le couple d'objets indécomposables  $(M, M')$  tel que  $T = \bar{T} \oplus M$  et  $T' = \bar{T} \oplus M'$  sont tous les deux des objets inclinants-amassés. De plus, les triangles*

$$M' \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow M'[1] \text{ et } M \rightarrow B' \rightarrow M' \rightarrow M[1]$$

*sont les triangles d'échange associés à  $(M, M')$ .*

**Exemple 3.19.** *Soit  $\mathcal{C}_Q$  et  $M$  un objet indécomposable de  $\mathcal{C}_Q$ . On prétend que  $(M, M[1])$  est une paire d'échange. Dans la preuve du théorème 3.13, on a montré que*

$$\dim_k \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M, M[1]) = 1 \text{ et } \dim_k \text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}^1(M[1], M) = 1.$$

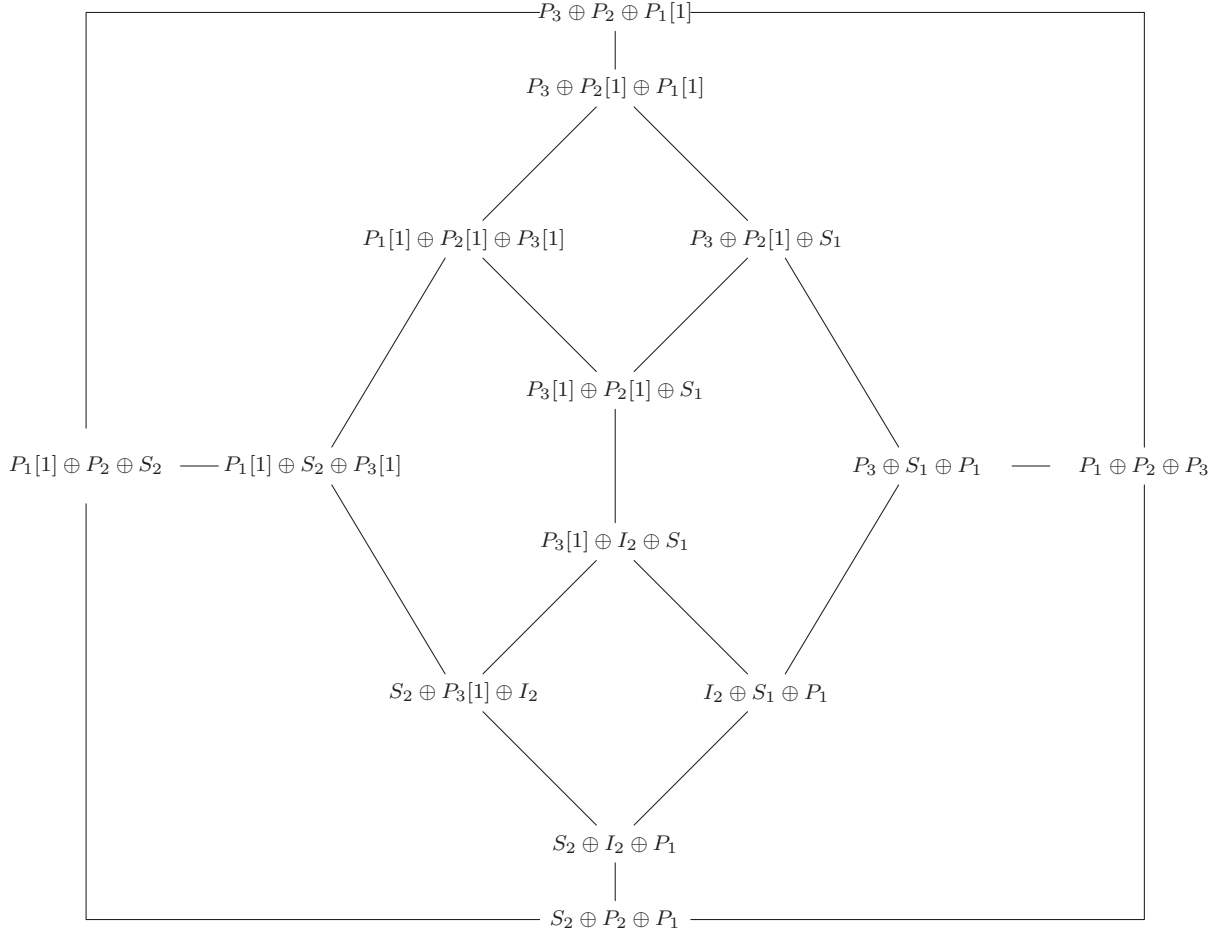


C'est une condition nécessaire et suffisante [BMR<sup>+</sup>06] pour que  $(M, M[1])$  soit une paire d'échange.

**Définition 3.20.** Soit  $Q$  un carquois fini, connexe et acyclique et  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amassée. Le graphe d'échange de  $\mathcal{C}_Q$  est un graphe, noté  $EG(\mathcal{C}_Q)$ , tel que :

- i) les points sont les objets inclinants-amassés de  $\mathcal{C}_Q$ ,
- ii) il y a une arête entre  $T$  et  $T'$  si  $T = \bar{T} \oplus M$  et  $T' = \bar{T} \oplus M'$  avec  $(M, M')$  une paire d'échange.

**Exemple 3.21.** Reprenons la catégorie amassée  $\mathcal{C}_Q$  de l'exemple 3.12. Voici son graphe d'échange.



**Lemme 3.22.** *Soit  $N$  un objet rigide indécomposable dans  $\mathcal{C}_Q$  et  $(M, M')$  une paire d'échange. Supposons que  $M \cong \tau N$  ou  $M' \cong \tau N$ . On a alors*

$$\mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, M) + \mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, M') = \max(\mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B), \mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B')) + 1.$$

*Démonstration.* [BMR07] □

**Proposition 3.23.** *Soit  $N$  un objet rigide indécomposable dans  $\mathcal{C}_Q$  et  $(M, M[1])$  une paire d'échange. Supposons que  $M \not\cong \tau N$  et  $M' \not\cong \tau N$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

*i) On a l'égalité*

$$\mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, M) + \mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, M') = \max(\mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B), \mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B')).$$

*ii) Une des deux suites suivantes est exacte.*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, M') \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, M) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, B') \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(N, M') \longrightarrow 0$$

*Démonstration.* [BMR07] □

**Remarque 3.24.** *Notons qu'un autre résultat de [BMR07] indique qu'au moins une des deux suites de la proposition 3.23 ii) est exacte si  $N = P[n]$  où  $P$  est un projectif et  $n \in \mathbb{Z}$ . Nous pouvons donc utiliser l'égalité en i) dans le cas où  $N$  est transjectif.*

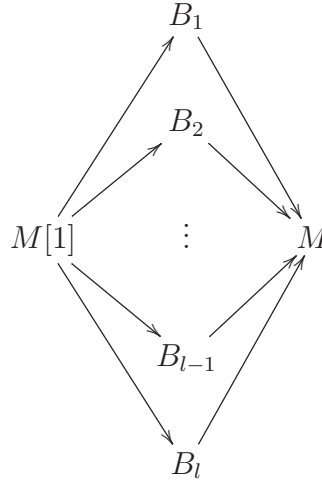
Enfin, soit  $\{e_i = [e_{i1}, \dots, e_{in}] \mid 1 \leq i \leq n, e_{ii} = 1, e_{ij} = 0 \text{ pour } j \neq i\}$  la base canonique de  $\mathbb{Z}^n$ . Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour prouver le théorème suivant.

**Théorème 3.25.** *Soit  $Q$  un carquois acyclique,  $T$  un objet inclinant-amassé transjectif dans  $\mathcal{C}_Q$ ,  $f$  une  $\mathbb{Z}_{trop}^{|Q_0|}$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T})$  et telle que  $f(T_i[1]) = -e_i$  pour tout  $i \in Q_0$ . Alors,  $f(M) = \mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, M)$  pour tout objet indécomposable transjectif  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$  tel que  $M$  n'est pas un objet dans  $\operatorname{add}(T[1])$ .*

*Démonstration.* Posons  $n = |Q_0|$  et soit l'application

$$\begin{aligned} \phi : \operatorname{Ob} \mathcal{T} &\longrightarrow \mathbb{Z}^n \\ M &\longmapsto \mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, M) \\ T_i[1] &\longmapsto -e_i \end{aligned}$$

où  $M$  est un objet indécomposable transjectif qui n'appartient pas à  $\operatorname{add}(T[1])$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $\mathbf{dim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, M) = (\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M))_{i=1}^n$ . Indiquons que  $\phi(M) = (\phi_i(M))_{i=1}^n$ . Montrons que  $\phi$  induit une  $\mathbb{Z}_{trop}^n$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ . Nous voulons donc que pour toute maille de la forme



l'égalité  $\phi(M) + \phi(M[1]) = \max\left(0, \sum_{p=1}^l \phi(B_p)\right)$  soit vérifiée.

Nous savons que  $(M, M[1])$  est une paire d'échange avec les triangles d'échange

$$M \rightarrow 0 \rightarrow M[1] \rightarrow M[1] \text{ et } M[1] \rightarrow \bar{T} \rightarrow M \rightarrow M[2]$$

où  $\bar{T} = \bigoplus_{p=1}^l B_p$ .

Il y a deux cas principaux à considérer en vertu du lemme 3.22 et de la proposition 3.23.

Fixons  $T_i$  pour un certain  $i$ .

a) Supposons que  $M \cong \tau T_i$  ou que  $M[1] \cong \tau T_i$ . On aura respectivement les paires d'échange  $(T_i[1], T_i[2])$  ou  $(T_i, T_i[1])$  et donc les égalités

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i[1]) + \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i[2]) = \\ \max(\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, 0), \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, \bar{T})) + 1. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i) + \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i[1]) = \\ \max(\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, 0), \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, \bar{T})) + 1. \end{aligned}$$

en vertu du lemme 3.22.

Il en résulte

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i[2]) - 1 = \max\left(0, \sum_{p=1}^l \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B_p)\right)$$

ou

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, T_i) - 1 = \max\left(0, \sum_{p=1}^l \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B_p)\right).$$

Par conséquent,

$$\phi_i(M) + \phi_i(M[1]) = \max\left(0, \sum_{p=1}^l \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B_p)\right)$$

dans les deux cas. Il reste à vérifier que  $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B_p) = \phi_i(B_p)$  pour tout  $1 \leq p \leq l$ . Si  $B_p$  n'est pas un objet de  $\mathrm{add}(T[1])$ , il est clair que c'est le cas en vertu de la définition de  $\phi$ . Par contre, si  $B_p$  est un objet de  $\mathrm{add}(T[1])$ , on a que

$$\phi_i(B_p) = 0 = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, B_p)$$

et donc

$$\phi_i(M) + \phi_i(M[1]) = \max \left( 0, \sum_{p=1}^l \phi_i(B_p) \right).$$

b) Supposons que  $M \not\cong \tau T_i$  et que  $M[1] \not\cong \tau T_i$ . Puisque  $T_i$  est transjectif, nous pouvons utiliser la proposition 3.23 qui nous donne l'égalité suivante.

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M) + \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M[1]) = \\ \max \left( \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, 0), \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, \bar{T}) \right) \end{aligned}$$

Comme en a), on a que

$$\max \left( 0, \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, \bar{T}) \right) = \max \left( 0, \sum_{p=1}^l \phi_i(B_p) \right).$$

Il reste donc à démontrer que

$$\phi_i(M) + \phi_i(M[1]) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M) + \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M[1]).$$

Or, en vertu de la définition de  $\phi_i$  et du fait que  $\phi_i(M) = 0 = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_i, M)$  si  $M$  est un objet de  $\mathrm{add}(T[1])$  tel que  $M \not\cong T_i[1]$ , il est clair que l'égalité est vérifiée.

Nous avons ainsi prouvé que  $\phi_i(M) + \phi_i(M[1]) = \max \left( 0, \sum_{p=1}^l \phi_i(B_p) \right)$  partout sur  $\Gamma(\mathcal{T})$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ , ce qui termine la preuve que  $\phi$  induit une  $\mathbb{Z}_{trop}^n$ -frise sur  $\Gamma(\mathcal{T})$ .

Nous avons donc montré que  $f$  et  $\phi$  sont deux frises tropicales sur  $\Gamma(\mathcal{T})$  qui coïncident sur  $\text{add}(T[1])$ . Mais alors, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_i$  et  $\phi_i$  sont deux  $\mathbb{Z}_{trop}$ -frises telles que  $f_i = \phi_i$  sur  $\text{add}(T[1])$ . En vertu du théorème 3.13, les  $f_i$  et  $\phi_i$  sont induits de  $\mathbb{Z}_{trop}$ -caractères sur  $\mathcal{T}$ , notés  $F_i$  et  $\Phi_i$  respectivement. Cela donne  $F = (F_i)_{i=1}^n$  et  $\Phi = (\Phi_i)_{i=1}^n$ .

En vertu de la définition de  $\mathbb{P}$ -caractère, on conclut que pour une paire d'échange  $(M', M'')$  avec triangles d'échange

$$M' \rightarrow B' \rightarrow M'' \rightarrow M'[1] \text{ et } M'' \rightarrow B'' \rightarrow M' \rightarrow M''[1]$$

on a

$$F_i(M') + F_i(M'') = \max(F_i(B'), F_i(B''))$$

et

$$\Phi_i(M') + \Phi_i(M'') = \max(\Phi_i(B'), \Phi_i(B''))$$

pour tout  $i$ .

On prétend que  $F$  et  $\Phi$  coïncident sur tous les objets inclinants-amassés dans  $\mathcal{C}_Q$ . En effet, procédons par récurrence sur le nombre d'arêtes entre deux objets inclinants-amassés dans le graphe d'échange de  $\mathcal{C}_Q$ . Nous appellerons ce nombre d'arêtes la *distance* entre ces deux objets.

Supposons que  $T'$  est un objet inclinant-amassé de  $\mathcal{C}_Q$  et  $T''$  un autre objet inclinant-amassé qui est à une distance  $d = 1$  de  $T'$  dans le graphe d'échange de  $\mathcal{C}_Q$ . Alors  $T' = \bar{T} \oplus M'$  et  $T'' = \bar{T} \oplus M''$  avec  $(M', M'')$  une paire d'échange et les triangles d'échange

$$M' \rightarrow B' \rightarrow M'' \rightarrow M'[1] \text{ et } M'' \rightarrow B'' \rightarrow M' \rightarrow M''[1]$$

où  $B', B'' \in \text{add}(T')$ . Montrons que si  $F$  et  $\Phi$  coïncident sur  $\text{add}(T')$ , alors  $F$  et  $\Phi$  coïncident sur  $\text{add}(T'')$ , c'est-à-dire que  $F_i(T''_j) = \Phi_i(T''_j)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et pour

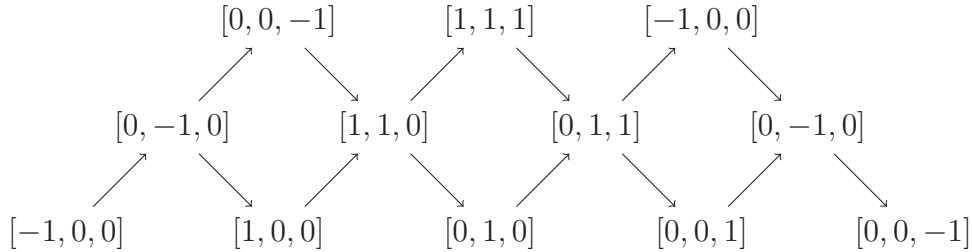
tout  $1 \leq j \leq n$ . Fixons  $i$ . Il suffit de vérifier la valeur des  $\mathbb{Z}_{trop}$ -caractères en  $M'$  et  $M''$ . Puisque  $F_i$  et  $\Phi_i$  coïncident sur  $\text{add}(T')$ , cela implique

$$\begin{aligned} F_i(M'') &= \max(F_i(B'), F_i(B'')) - F_i(M') \\ &= \max(\Phi_i(B'), \Phi_i(B'')) - \Phi_i(M') \\ &= \Phi_i(M''). \end{aligned}$$

Supposons à présent que si  $T''$  est à une distance  $d = k$ ,  $k \geq 1$  et que  $F_i$  et  $\Phi_i$  coïncident sur  $\text{add}(T'')$ . Montrons que c'est aussi le cas pour  $d = k + 1$ .

Soit  $T''$  qui est à la distance  $d = k + 1$  de  $T'$  et  $T^*$  qui est à la distance  $d = k$  de  $T'$  et à la distance  $d = 1$  de  $T''$ . Alors, comme plus haut, on montre que  $F_i$  et  $\Phi_i$  qui coïncident sur  $\text{add}(T^*)$  coïncident aussi sur  $\text{add}(T'')$ . Par conséquent,  $F$  et  $\Phi$  sont égaux sur les facteurs directs de tous les objets inclinants-amassés, d'où  $F = \Phi$  sur  $\mathcal{T}$ . Par conséquent,  $f = \phi$  sur  $\Gamma(\mathcal{T})$  et ceci termine la preuve.  $\square$

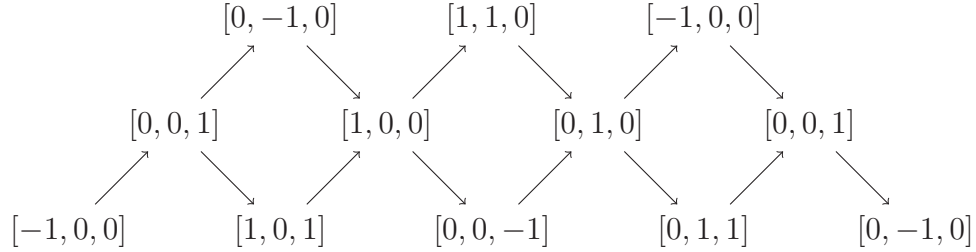
**Exemple 3.26.** Continuons avec la catégorie amassée de l'exemple 3.12. Posons  $T = P_3 \oplus P_2 \oplus P_1$  et calculons la  $\mathbb{Z}_{trop}^3$ -frise donnée par le théorème.



**Remarque 3.27.** Observons que dans l'exemple 3.12,  $X_M^T = \frac{h(x_1, x_2, x_3)}{x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}}$  avec  $h(x_1, x_2, x_3)$  qui n'est pas divisible par  $x_i$  pour tout  $i$ , pour tout  $M \in \text{Ob } \mathcal{T}$ . On remarque alors que la frise obtenue par le théorème 3.25 est en fait induite des valeurs des  $a_i$ , c'est-à-dire que

$$f(M) = [a_1, a_2, a_3].$$

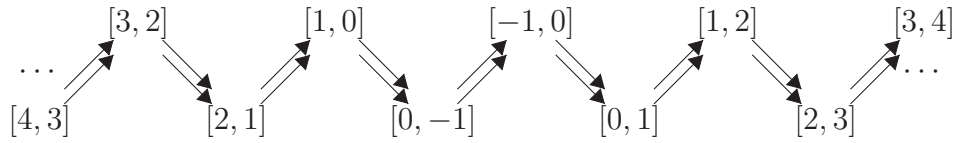
**Exemple 3.28.** Reprenons  $Q : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ , mais posons  $T = P_3 \oplus P_1 \oplus S_1$ . La  $\mathbb{Z}_{\text{trop}}^3$ -frise donnée par le théorème est la suivante.



**Exemple 3.29.** Soit le carquois de Kronecker

$$Q : 2 \rightrightarrows 1$$

avec l'objet inclinant-amassé  $T = P_1 \oplus P_2$ . La composante transjective de  $\mathcal{C}_Q$  est  $\mathbb{Z}Q$ , ce qui donne la  $\mathbb{Z}_{\text{trop}}^2$ -frise suivante.



**Remarque 3.30.** Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique,  $\mathcal{C}_Q$  sa catégorie amassée et  $T$  un objet inclinant-amassé dans  $\mathcal{C}_Q$ . Posons  $B = \text{End}(T)$  l'algèbre d'endomorphismes de  $T$ . On dit alors que  $B$  est une algèbre inclinée-amassée [BMR07] et si  $T$  est un objet transjectif,  $B$  est une algèbre dérochée-amassée [Rin11]. Maintenant supposons que  $B$  est une algèbre inclinée-amassée. Un résultat bien connu de la théorie des algèbres inclinées-amassées dit que le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, -)$  induit l'équivalence  $\mathcal{C}_Q / (\text{add } T[1]) \cong \text{mod } B$ . En vertu de ces informations, le théorème 3.25 indique que les vecteurs dimension des  $B$ -modules indécomposables transjectifs sont en fait les valeurs de la frise  $f$ .



# Bibliographie

- [AD11] I. Assem and G. Dupont. Friezes and a construction of the euclidean cluster variables. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215 :2322–2340, 2011.
- [All69] P. J. Allen. A fundamental theorem of homomorphisms for semirings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 21 :412–416, 1969.
- [ARS95] M. Auslander, I. Reiten, and S.O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Number Number 36 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Ass97] I. Assem. *Algèbres et modules : cours et exercices*. Les Presses de l’Université d’Ottawa-Masson, Ottawa-Paris, 1997.
- [ASS06] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of Representation Theory of Associative Algebras*. Number Number 65 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Toruń, 2006.
- [BL08] G. Birkhoff and S. Mac Lane. *A Survey of Modern Algebra*. A K Peters, Ltd, 5 edition, 2008.
- [BMR<sup>+</sup>06] A.B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, and G. Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Advances in Mathematics*, 204(2) :572–618, 2006.
- [BMR07] A.B. Buan, R. J. Marsh, and Idun Reiten. Cluster-tilted algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359 :323–332, 2007.

- [BPT15] K. Baur, M.J. Parsons, and M. Tschabold. Infinite friezes. *arXiv :150402695v1 [math.CO]*, 2015.
- [CC73a] J. Conway and H.S.M. Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns. *The Mathematical Gazette*, 57 :175–183, 1973.
- [CC73b] J. Conway and H.S.M. Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns. *The Mathematical Gazette*, 57 :87–94, 1973.
- [Cox71] H.S.M. Coxeter. Frieze patterns. *Acta Arithmetica*, 18 :297–310, 1971.
- [FZ03] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras ii : Finite type classification. *Inventiones Mathematicae*, 154 :63–121, 2003.
- [Gol99] J.S. Golan. *Semirings and their Applications*. Springer, 1999.
- [Guo12] L. Guo. On tropical friezes associated with Dynkin diagrams. *arXiv :12011805v2 [math.RT]*, 2012.
- [Heu10] C. J. M. Heunen. *Categorical Quantum Models and Logics*. PhD thesis, Radboud University Nijmegen, 2010.
- [Kel05] B. Keller. On triangulated orbit categories. *Documenta Mathematica*, 10 :551–581, 2005.
- [KK10] V. Kala and M. Korbelař. Congruence-simple subsemirings of  $q$ . *Semigroup Forum*, 81(2) :286–296, 2010.
- [KS85] W. Kuich and A. Salomaa. *Semirings, Automata and Languages*, volume 5 of *Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag New York, Inc., 1985.
- [Mit65] Barry Mitchell. *Theory of Categories*. Academic Press, 1965.
- [Pal08] Y. Palu. Cluster character for 2-Calabi-Yau triangulated categories. *Annales de l’Institut Fourier*, 58 :2221–2248, 2008.

- [Rin11] C.M. Ringel. Cluster-concealed algebras. *Advances in Mathematics*, 226 :1513–1537, 2011.
- [Rin12] C.M. Ringel. Introduction to the representation theory of quivers, 2012. Lecture notes from a course in King Abdulaziz University (KUA) in Jeddah.
- [Sak09] J. Sakarovitch. *Elements of Automata Theory*. Cambridge University Press, 2009.
- [Sch85] W. Scharlau. *Quadratic and Hermitian Forms*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 1985.
- [Sch13] R. Schiffler. *Quiver Representations*. CMS Books in Mathematics. Springer, 2013.
- [Van39] H.S. Vandiver. On some simple types of semi-rings. *Mathematical Association of America*, 46 :22–26, 1939.